Austauschverfahren :

$$\begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ y_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ y_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ y_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|ccccc} & x_1 & x_2 & y_2 & x_4 & 1 \\ y_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ x_3 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ y_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{array}$$ **Pivot**

1.Pivotelement $= \frac{1}{\text{Pivot}}$

2.Die restliche Pivotzeile durch Pivot teilen $\rightarrow$ mit negativem $(-)$ Vorzeichen

3.Pivotspalte wier durch Pivotelement geteilt (ohne Pivotelement)

4.restlichen Elemente subtrahieren wir $\frac{Q_{\text{Zeile wo wir sind, Pivotsalte}} * a_{\text{Pivotzeile, Splate wo wir sind}}}{\text{Pivotelement}}$

Bsp.:

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ y_1 & 3 & 7 & 4 & -13 \\ y_2 & -5 & 4 & 5 & 2 \\ y_3 & -1 & 2 & 3 & 16 \end{array}$$ **Pivot**

$A * \underline{x} + \underline{b} = 0$

$A^{-1} * A * \underline{x} + A^{-1} * \underline{b} = 0$

$x = -A^{-1} * \underline{b}$

$$\begin{array}{c|cccc} & y_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ x_1 & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{13}{3} \\ y_2 & \frac{-5}{3} & \frac{47}{3} & \frac{35}{3} & -\frac{59}{3} \\ y_3 & \frac{-1}{3} & \frac{13}{3} & \frac{13}{3} & \frac{35}{3} \end{array}$$

$\frac{47}{3} = 4 - \frac{-5*7}{3}$

$\frac{35}{3} = 5 - \frac{-5*4}{3}$

$\frac{13}{3} = 2 - \frac{-1*7}{3}$

$\frac{13}{3} = 3 - \frac{-1*4}{3}$

$-\frac{59}{3} = 2 - \frac{-5*-13}{3}$

$\frac{35}{3} = 16 - \frac{-1*-13}{3}$

Lineare Optimierung:

	Damenschuhe	Herrenschuhe	Kapazität verfügbar
Herstellzeit[h]	20	10	8000
Maschinenzeit[h]	4	5	2000
Lederbedarf[cm²]	6	15	4500
Reingewinn	16	32	

x_1 = Anzahl der Damenschuhe

x_2 = Anzahl der Herrenschuhe

$20*x_1 + 10*x_2 \leq 8000$

$4*x_1 + 5*x_2 \leq 2000$

$6*x_1 + 15*x_2 \leq 4500$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

$y_1 = -20*x_1 - 10*x_2 + 8000 \geq 0$

$y_2 = -4*x_1 - 5*x_2 + 2000 \geq 0$

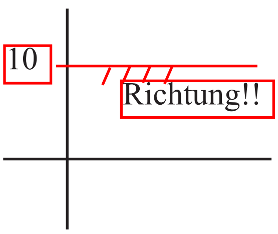
$y_3 = -6*x_1 - 15*x_2 + 4500 \geq 0$

$\boxed{x_1 \geq 0}$

$\boxed{x_2 \geq 0}$

$y_3 = -x_2 + 10 \geq 0$

$x_2 = 10$

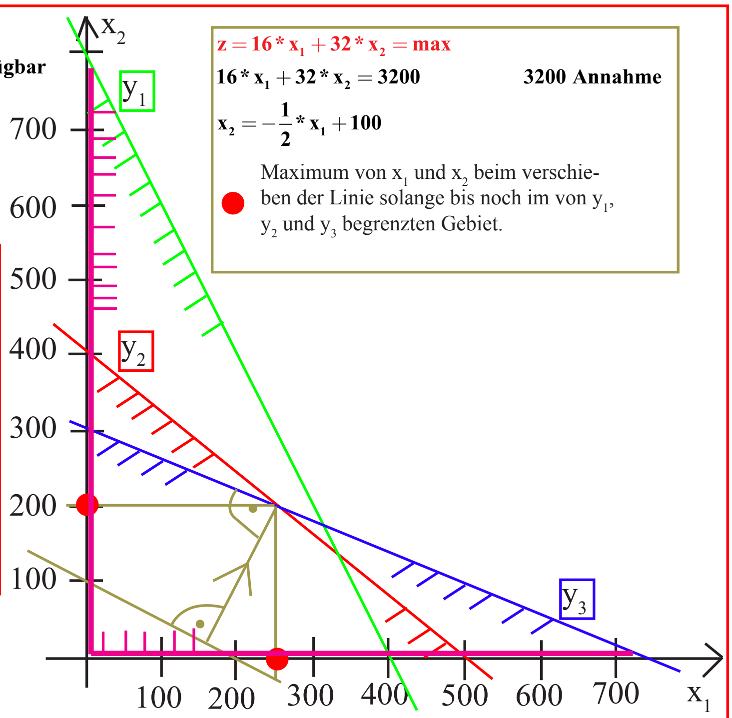


$z = 16 * x_1 + 32 * x_2 = \max$

$16 * x_1 + 32 * x_2 = 3200$ 3200 Annahme

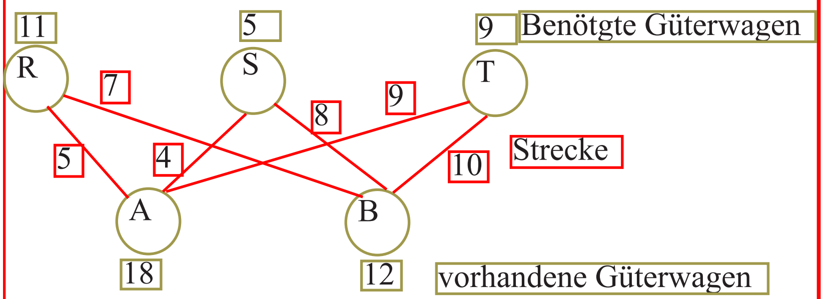
$x_2 = -\frac{1}{2} * x_1 + 100$

Maximum von x_1 und x_2 beim verschieben der Linie solange bis noch im von y_1, y_2 und y_3 begrenzten Gebiet.



Beispiel Formelfindung:

Güterwagen sollen minimal von A und B zu R,S,T.



	R	S	T
A	5	4	9
B	7	8	10

$x_1 =$ **Wagen von A nach R**

$x_2 =$ **Wagen von A nach S**

$y_1 = -x_1 - x_2 + 18 \geq 0$ **Wagen von A nach T**

$y_2 = -x_1 + 11 \geq 0$ **Wagen von B nach R**

$y_3 = -x_1 + 10 \geq 0$ **Wagen von B nach S**

$y_4 = 12 + x_1 - 11 + x_2 - 10 \geq 0$

$= -9 + x_1 + x_2 \geq 0$ **Wagen von B nach T**

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

$$z = 5 * x_1 + 4 * x_2 + 9 * (-x_1 - x_2 + 18) + 7 * (-x_1 + 11) + 8 * (-x_2 + 10) + 10 * (x_1 + x_2 - 9)$$

$z = -x_1 - 3 * x_2 + 229 =$ **nimimal**

Simplex Algorythmus:

$$\begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_i \\ y_p \\ y_n \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_q & x_n & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1q} & a_{1n} & c_1 \\ a_{i1} & a_{iq} & a_{in} & c_i \\ a_{p1} & a_{pq} & a_{pn} & c_p \\ a_{n1} & a_{nq} & a_{nn} & c_n \\ b_1 & b_q & b_n & d \end{pmatrix} \end{array}$$

1.Bedingung : $a_{pq} < 0$

2.Bedingung : $b_q \geq 0$

3.Bedingung : Quotient $Q_i \left| \frac{c_i}{a_{iq}} \right| =$ **minimal**

Beispiel:

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & 1 & Q_i \\ \hline y_1 & -20 & -10 & 8000 & -400 \\ y_2 & -4 & -5 & 2000 & -500 \\ y_3 & -6 & -15 & 4500 & -750 \\ z & 16 & 32 & 0 & \end{array}$$

↓ Austauschverfahren

Tauschen, bis alle z Werte negativ!

$$\begin{array}{c|cccc} & y_1 & x_2 & 1 & Q_i \\ \hline x_1 & \frac{1}{-20} & -\frac{1}{2} & \boxed{400} & -800 \\ y_2 & \frac{1}{5} & -3 & \boxed{400} & -133.33 \\ y_3 & \frac{3}{10} & -12 & 2100 & -175 \\ z & -\frac{4}{5} & 24 & 6400 & \end{array}$$

Resultat x_1-x_n

nächtstes Pivotelement

Bei Maximum wiederhlen, bis ganze z-Reihe ≤ 0

Bei Minimum wiederhlen, bis ganze z-Reihe ≥ 0

beim minimieren: Funktion hier: $z = (16 * x_1 + 32 * x_2) * -1$

$z = -16x_1 - 32 * x_2$

Zahlenformate des DSP:

32 Bit Fixpoint als Integer:

31	30	29	...	2	1	0
-2^{31}	2^{30}	2^{29}	...	2^{2}	2^{1}	2^{0}

grösste Zahl 2^{31}-1

kleinste Zahl 1

1.Bit immer Vorzeichen.

$-2^{31} \le x < 2^{31}$

negative Zahlen immer im 2-Er Komplement

Bsp. 5

5=00000101

1er Komplement = 11111010 -> invertiert

2er Komplement = 1er komplement + 1 = 11111011

-5=11111011

32 Bit Fixpoint als Fractional:

31	30	29	...	2	1	0
2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	...	2^{-30}	2^{-31}	2^{-32}

$z = 2^{-1} + 2^{-2} + ... + 2^{-32}$

$z = \sum_{e=1}^{32} 2^{-i}$ $\qquad |*2^{32}$

$z * 2^{32} = 2^{31} + 2^{30} + ... + 2^{0}$

Bsp. 0.5278

$0.5278*2^{32} = 266883738$

$-> bin = 10000111000111011111001101001101 0$

Bsp. 8 bit Zahl

$11001000 = 200$

$\frac{200}{2^{8}} = 0.78125$

32 Bit Floatingpoint:

31	30 – 23	22 – 0
s	*Exponent*	*Fraction*

$Zahl = (-1)^{s} * 2^{(Exponent-127)} * (1 + Fraction)$

$\infty = alles\ 1$

$-\infty = alles\ 0$

*Bsp.*15.257

$s = 0$

$\exp = \log_2(15.257) = \frac{\log_{10}(15.257)}{\log_{10}(2)} = 3.93 = 3$ (immer Abrunden!)

3 =expo – 127

expo=130=10000010

Mantisse=$\frac{15.257}{2^{3}} = 1.907125$ Achtung: bei 1.xxxx 1 weglassen

bei 0.xxxx belassen aber expo+126

$0.907125 * 2^{23} = 7609516 = 11101000001110010101100$

Umrechnung mit TI-89:

Dez->Hex	3528>Hex
Dez->Bin	3528>bin
Hex->Dez	0h7b2
Bin->Dez	0b1011101

immer abrunden!!

```
Zahlenraum bei signed Integer:
bei n Bit:
-2^(n-1)...2^(n-2) - 1

Multiplikation:
10010001*1100111|
         1100111
        0000000*
       0000000**
      0000000***
     1100111****
    0000000*****
   0000000******
  1100111*******
  11101001010111|
```

$\mathbb{R} \rightarrow M \qquad M \rightarrow \mathbb{R}$

$Zahl = \delta * m * B^e$

$L =$ Anzahl Ziffern

$\delta =$ Vorzeichen

$B =$ Basis

$e =$ Exponent

$m =$ Mantisse

$M(B, L, e_0, e_1)$

$$m = \frac{z_1}{B} + \frac{z_2}{B^2} + \ldots + \frac{z_L}{B^L} = \sum_{j=1}^{L} z_j * B^{-j}$$

$M(B, L, e_0, e_1)$ ist Menge der Maschinenzahlen

e_0, e_1 = Bias Exponentenverschiebung

Bias = Verschiebung des Exponenten $e -$ Bias = eigentlicher Exponent

normalisert = führende Zahl 1.Ziffer $\neq 0$

maxreal $= B^{e_1} * (1 - B^{-L})$

minreal normalisiert $= B^{e_0 - 1}$

minreal nicht normalisiert $= B^{e_0 - L}$

Das Maschinenepsilon eps δ entspricht der kleinsten Zahl δ für die gilt:

$1 + \delta > 1^1$

eps $\delta = \frac{1}{2} * B^{1-L}$ Maschinenepsilon ist auch der relative Rundungsfehler!

Gestetz von DeMorgan:

$!p \&\& !q = !(p \,||\, q)$

$!p \,||\, !q = !(p \&\& q)$

1er Komplement ist nur Bitweise negiert!

2er Komlement (aus X wird -X):

1.negiere X Bitweise

2.addiere 1

Üerlauf erkennen:

```
  00010   Erweiterung um ein Bit
 +00110
  01000   Achtung → beide Vorzeichen verschieden
```

binäre Operatoren:

+, −, *, /, %

&, &&

|, ||

^ Exklusives Oder:

00 = 0

01 = 1

10 = 1

11 = 0

<< bitweise Schiebung nach links → *2

>> bitweise Schiebung nach links → /2

unäre Operatoren:

++, −−, ~ (Bitweise negation), − (Vorzeichen Minus)

$x \in \mathbb{R}$ $\rho(x) \in M$ $\Delta = |x - \rho(x)|$

Abstand zwischen zwei Zahle auf M $= \Delta = B^{e-L}$

Absoluter Rundungsfehler eps $= \frac{\Delta}{2} \leq \frac{1}{2} * B^{e-L}$

In Berechnungen mit Gleitpunktzahlen sollten die kleinen Terme zuerst zusammengezählt werden!

Stellenauslöschung bei Subtraktion, wenn bede Zahlen etwa gleich gross!

$x, y \in \mathbb{R}$ $\tilde{x}, \tilde{y} \in M$

absolute Fehler $\Delta x = \tilde{x} - x$

relativer Fehler $\delta x = \frac{\Delta x}{x} = \left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right|$

absolute Fehler $\Delta(x + y) = \Delta x + \Delta y$

absolute Fehler $\Delta(x - y) = \Delta x - \Delta y$

absolute Fehler $\Delta(x * y) \approx x * \Delta y + y * \Delta x$

relativer Fehler $\delta(x \pm y) = \frac{x}{x \pm y} * \delta x + \frac{y}{x \pm y} * \delta y$

relativer Fehler $\delta(x * y) = \frac{\Delta(x * y)}{x * y} \approx \frac{y * \Delta x + x * \Delta y}{x * y} \approx \delta x * \delta y$

Bei Stellengenauigkeitscheck von zwei Zahlen a und b:

$abs(a+b) < 2^{stelle} * \frac{|a| + |b|}{2}$

$\Delta f(x) \approx f'(x) * \Delta x$

$\delta f(x) \approx \frac{x * f'(x)}{f(x)} * \frac{\Delta x}{x} = \frac{x * f'(x)}{f(x)} * \delta x$

Kondidionszahl $\kappa_f = \frac{x * f'(x)}{f(x)} = \frac{\text{relativer Fehler des Resultats}}{\text{relativer Fehler der Daten}}$

ist κ_f gross, so verstärkt sich der Fehler durch die Anwendung der Funktion stark $\rightarrow$ schlecht konditioniert

Identitäten verwenden:

$x^2 - y^2 = (x + y) * (x - y)$ **auch bei:** $\sin(x) - \cos(y) \rightarrow$ **sin und cos ausrechenen und auf die vorgegebenen Kommastellen rechene.**

$1\text{-}\cos(\alpha) \rightarrow$ **Auslöschung** $=$ $2 * \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow$ **besser**

-Verwendung von Taylorreihen

-Verwendung von genaueren Datentypen (double statt float)

M(B,L,e0,e1) -> M(2,4,-2,1)

	/2 <	/2 <-		-> *2
Mantisse	e-2	e-1	e0	e1
0000	0	0	0	0
0001	0.015625	0.03125	0.0625	0.125
0010	0.03125	0.0625	0.125	0.25
0011	0.046875	0.09375	0.1875	0.375
0100	0.0625	0.125	0.25	0.5
0101	0.078125	0.15625	0.3125	0.625
0110	0.09375	0.1875	0.375	0.75
0111	0.109375	0.21875	0.4375	0.875
1000	0.125	0.25	0.5	1
1001	0.140625	0.28125	0.5625	1.125
1010	0.15625	0.3125	0.625	1.25
1011	0.171875	0.34375	0.6875	1.375
1100	0.1875	0.375	0.75	1.5
1101	0.203125	0.40625	0.8125	1.625
1110	0.21875	0.4375	0.875	1.75
1111	0.234375	0.46875	0.9375	1.875
$\frac{1}{2}\ \frac{1}{2^2}\ \frac{1}{2^3}\ \frac{1}{2^4}$ $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{16}$	Normalisiert	einmahlig aber nicht normalisiert		
	zusammen alle Zahlen $(B^L - B)(e_1 - e_0) * 2 + (B - 1) * 2 + 1$			

Beispiel 10 als $M(2,16,-16,15)$

1 10100 1010............

Vorzeichen

Exponent: 20 $(0.625*2^4=10)$ $\rightarrow$ Exponent 4 $\rightarrow 20-16=4$

dez $10=$ bin $1010 = 0.5+0.125=0.625$

Beispiel 0.1 als Binär (geht auch mit anderen Basen):

$2*0.1=0.2\rightarrow$ Ziffer: 0

$2*0.2=0.4\rightarrow$ Ziffer: 0

$2*0.4=0.8\rightarrow$ Ziffer: 0

$2*0.8=1.6\rightarrow$ Ziffer: 1

$2*0.6=1.2\rightarrow$ Ziffer: 1

$2*0.2=0.4\rightarrow$ Ziffer: $0\rightarrow$ ab hier wirds periodisch

Resultat $=0.00011001100110011001\ldots\ldots$

Beispiel 10 als binär:

$10/2=5\rightarrow$ Rest 0 $\rightarrow$ Ziffer: 0

$5/2=2\rightarrow$ Rest 1 $\rightarrow$ Ziffer: 1

$2/2=1\rightarrow$ Rest 0 $\rightarrow$ Ziffer: 0

$1/2=0\rightarrow$ Rest 1 $\rightarrow$ Ziffer: $1\rightarrow$ bis Wert kleiner 0

Resultat $=1010$

Beispiel 0.1 als Binär:

$0.1=\frac{1}{16}$ Rest : 0.0375 $\rightarrow$ grösstes Bit finde, das gerade noch kleiner

$0.0375=\frac{1}{32}$ Rest : 0.00625

$0.00625=\frac{1}{256}$ Rest : 0.00234

$0.00234=\frac{1}{512}$ Rest : ....

Resultat $=0.000110011\ldots\ldots$

Beispiel 0.1 als Binär

$0.1=\frac{1}{10}$ als binär $\frac{1}{1010}$

1 : $1010=0,00011$

10000

-1010

001100

-1010

0010

Umrechnen ins Zehnersystem:

B = fremde Basis

n = anzahl Ziffern

$$Z=\frac{B^{n-1}*z_1+B^{n-2}*z_2+B^{n-3}*z_3+\ldots+z_n}{B^n}$$

$$0.1011=\frac{2^{4-1}*1+2^{4-2}*0+2^{4-3}*1+1}{2^4}=\frac{8+0+2+1}{16}=\frac{11}{16}$$

Beispiel $(1-2^{-8})*2^3$ mit "schieben":

$0,9999*10^3=1-10^{-4}*10^3$

$M(2,8,-4,3)$ $(1-2^{-8})*2^3$

VZ = 0

Exponent = Grösster Exponent mit 3 = 111

Mantisse = 100000000 (9*0)S

-1 -2^{-8}

=11111111 (8*1)

13.5 als Binär:

$1\leq m<2$

13.5 durch 2^x bis $1\leq m<2$

$\frac{13.5}{8}=1.6875*2^3\rightarrow 0.6875$ (da immer 1)

$0.6875*2$	$=1.375$	1
0.375*2	$=0.75$	0
0.75*2	$=1.5$	1
0.5*2	$=1$	1

Rest 0

0.6875 = 0.1011

13.5 = 0.1011 $*2^3$

Exponentialverhalten bei 8 Bit (2^8=256):

Exponent $\pm\infty=127$

Exponent $0=-128$

Addition, Subtraktion:

M(65536,3,-32768,32767)

	Vorz.	Exponent	Z1	Z2	Z3	
Zahl1	+	2	65535	0	0	
Zahl2	+	1	65535	65535	65535	
Zahl2: gleicher Exponent	+	2	0	65535	65535	65535
Zahl2: shiften, da aufgerundet > 0.5 * Stelle	+	2	1	0	0	
Summe	+	2 1	0	0	0	
Summe zurückshiften	+	3	1	0	0	

Beispiele:

$M(256,3,-3,5)$

$z1=(1-256^{-3})*256^{-3}$

$z2=384$ (256+128)

$z3=256^{-5}$

$z4=-1.5$ (-1.5*256)

	VZ	Exponent	Ziffer1	Ziffer2	Ziffer3
z1	1	−3(0 bei Bias)	255	255	255
z2	1	2	1	128	0
z3	1	-3	0	$1\left(\frac{1}{256^2}\right)$	0
z4	−	1	1	128	0

Die Subtraktion von Dualzahlen

Hier kommen wir mit unserer normalen Schulmathematik nicht mehr weiter. Bevor wir uns mit dem komplizierten „Warum ist das denn so?“ beschäftigen, merken wir uns ersteinmal den Mechanismus. Der Satz lautet: Die Subtraktion von 2 Zahlen erfolgt durch die Addition des Zweierkomplementes. Als konkretes Beispiel nehmen wir dazu die Rechnung 14-9=5. - 9 ist im Dualsystem 00001001.

- Das Einerkomplement zu 00001001 ist 11110110.
- Das Zweierkomplement 11110111.
- Dies addieren wir nun zu 14 also 00001110.

```
  00001110
 +11110111
  ========
  00000101
```

Die Addition von Dualzahlen

Die Addition funktioniert wie bei der Addition von Dezimalzahlen:

```
  0111
 +0100
  ====
  1011
```

Die Multiplikation

Die Multiplikation entspricht einem Verschieben nach links, man spricht auch von einem shift, in diesem Fall ein Links-Shift. Betrachtet man einige einfache Multiplikationen, dann wird das Prinzip deutlich:

00001111 * 00000010 = 00011110
00001111 * 00000100 = 00111100
00001111 * 00001000 = 01111000
00001111 * 00010000 = 11110000

Komplizierter wird es, wenn nicht nur mit 2, sondern mit einer beliebigen Zahl multipliziert werden soll: Für jede 1 im zweiten Operand muss eine Multiplikation ausgeführt werden, und die Ergebnisse anschließen miteinander addiert werden.

00001111 * 00000101 entspricht also 00001111 * 00000100 + 00001111 * 00000001
= 00111100 + 00001111 = 01001011

Auch bei der Multiplikation muss dringend auf den Wertebereich geachtet werden. Denn genauso wie bei der Addition kann es hier zu einem Überlauf kommen, der das Ergebnis verfälscht.

Die Division

Bei der Multplikation wird ein Links-Shift durchgeführt, dementsprechend ist es logisch, dass bei der Division ein Rechts-Shift durchgeführt wird. Teile ich die Zahl 8 durch 2 ergibt das 4, in Dualschreibweise 00001000 / 00000010 = 00000100. Die Division durch 2 entspricht also einem Rechts-Shift von einer Stelle. Die Division von 8 durch 4 ergibt 2, in Dualschreibweise 00001000 / 00000100 = 00000010, also ein Rechts-Shift von zwei Stellen. Was passiert nun aber mit Nachkommastellen? Schauen wir uns die einfache Division von 3 durch 2 an. 00000011 / 00000010 = 00000001 Der Rechts-Shift bewirkt, dass die letzte 1 rechts aus dem Zahlenbereich „herausfällt“. Das bedeutet, dass alle Nachkommastellen abgeschnitten werden. Wichtig: Es wird nicht gerundet, es wird abgeschnitten. Das Ergebnis aus 3 durch 2 ist also 1!!! Diese Art der Division funktioniert jedoch nur, wenn man durch 2 oder eine Potenz von 2 dividiert. Wir kommen jedoch auch mit unserer ganz normalen „Grundschulmathematik“ weiter. Hier ein Beispiel, wie man im Dezimalsystem normalerweise dividiert:

```
  1307/11=118 Rest 9
 -11
  ==
   20
  -11
   ==
    97
   -88
    ==
     9
```

Wenn man diese Art der Division jetzt nach dem gleichen Schema bei binären Zahlen durchführt, dann kommt man auf das gleiche Ergebnis.

```
  10100011011/1011=1110110 Rest 1001
- 1011
 =====
  10010
 - 1011
  =====
    1111
   -1011
    ====
     1001
    -   0
     ====
     10010
    - 1011
     =====
      1111
     -1011
      ====
       1001
      -   0
       ====
       1001
```

Rechnet man die Dualzahlen jetzt wiederum in binäre Zahlen um, so kommt man wieder auf 1307/11=18 Rest 9 (siehe oben). Auch hier gilt wieder: Der Rest wird gnadenlos abgeschnitten, nicht gerundet. D.h. Der „Rest“ entfällt.

Matrizen :

-darf tauschen

-darf eine Zeile * rechnen

-darf zwei Zeilen addieren oder subtrahieren

-muss für Lösung linear abhänging sein -> Determinante

$$a_{11}*x_1+a_{12}*x_2+a_{13}*x_3+b_1=0$$
$$a_{21}*x_1+a_{22}*x_2+a_{23}*x_3+b_2=0 \qquad A*x+b=0 \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=0$$
$$a_{31}*x_1+a_{23}*x_2+a_{33}*x_3+b_3=0$$

Tabellenform :

x_1	x_2	x_3	1
a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3

Rückwärtseinsetzen in Rechtsdreieckform:

$$R=\begin{pmatrix} r_{11} & \dots & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{ii} & & \dots \\ \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}=R*x+c=0$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}=0$$

$$x_i=-\frac{c_i+\sum_{k=i+1}^{n} r_{ik}*x_k}{r_{ii}} \qquad \text{Beispiel } x_1=-\frac{c_1+(b*x_2+c*x_3)}{a}$$

bei Linksdreiecksform bei uns 1 in der Diagonale Vorwärtseinsetzen:

$$R=\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}=R*x+c=0$$

$$x_i=-\left(c_i+\sum_{k=i+1}^{n} r_{ik}*x_k\right) \qquad \text{Beispiel } x_1=-(c_1+(b*x_2+c*x_3))$$

Gauss Algorythmus $\rightarrow$ geht nur für quadratische Matrizen:

$A * x + b = 0$

$A = L * R$

$L * R * x + b = 0$ R*x=y

$L * y + b = 0$ $R * x + c = 0$ $c = -y$

Berechnung von L und R:

Beispiel $A * x + b = 0$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

R :

$$\begin{array}{cc} * & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ L_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3+3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrizeneintrag $= -\left(\dfrac{\text{Element wo wir sind}}{\text{Pivoelement}}\right) = -\left(\dfrac{3}{3}\right) = -1$

$$\begin{array}{cc} * & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$-2 = -\left(\dfrac{6}{3}\right)$

$$\begin{array}{cc} * & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ L_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$1 = -\left(\dfrac{-2}{2}\right)$ $R = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

L :

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **invertierte Werte von oben** **bei Rechnung von L:**

$$\begin{array}{cccc} * & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & L & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{array}$$

1. $L * y + b = 0$ **vorwärtseinsetzen**
2. $R * x - y = 0$ **rückwärtseinsetzen**

L und R vereint: $\begin{pmatrix} R & R & R \\ L & R & R \\ L & L & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ $y_1 = -1$ $y_2 = -1$ $y_3 = -2$
2. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \end{pmatrix} = 0$

Algorythmus Effizienz:

$L * R = O\left(\dfrac{n^3}{3}\right) = O\left(n^3\right)$

$z_{vorwärts} = 0 + 1 + 2 + \dots + n - 1 = \dfrac{n^2 - n}{2}$

$z_{rückwärts} = \dfrac{n^2 - n}{2} + n = \dfrac{n^2 + n}{2}$

Pivotelement :

$\left(\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{array}\right)$

verschieben der Zeilen in der Matrize, für ein Genaueres Resultat

KMS: KolonnenMaximumStrategie

masimales Element der Kolonne k wird als Pivotelement genommen.

$$\max_{i\geq k}\left|a_{ik}^{(k-1)}\right| = \left|a_{pk}^{(k-1)}\right|$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix}14 & 40 & 7\\ -3 & 20 & 3\\ 46 & 3 & -9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\1\\5\end{pmatrix} = 0 \rightarrow \text{Zeile}_{1,3}\text{vertauschen} \begin{pmatrix}46 & 3 & -9\\ -3 & 20 & 3\\ 14 & 40 & 7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\\8\end{pmatrix} = 0 \rightarrow \text{Zeile}_{2,3}\text{vertauschen} \begin{pmatrix}46 & 3 & -9\\ 14 & 40 & 7\\ -3 & 20 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\8\\1\end{pmatrix}$$

Relative KMS:

Beisiel:

$$\begin{pmatrix}14 & -4 & 7\\ -3 & 5 & 3\\ 46 & 3 & -9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\1\\5\end{pmatrix} = 0 \qquad \text{si}=\begin{pmatrix}14+4+7=25\\ 3+5+3=11\\ 46+3+9=58\end{pmatrix} \qquad \text{qi}=\frac{|\text{Matrizenelement}|}{\text{si}} = \begin{pmatrix}0.56\\ 0.2727\\ 0.7931\end{pmatrix}$$

grösstes Zeile immer oben:

$$\begin{pmatrix}46 & 3 & -9\\ -3 & 5 & 3\\ 14 & -4 & 7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\\8\end{pmatrix} = 0$$

dann Gauss: Faktor $= L = -R = -\left(-\left(\frac{-3}{46}\right)\right) = -0.65217$

$$\begin{pmatrix}46 & 3 & -9\\ -0.65217 & 5 & 3\\ 14 & -4 & 7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\\8\end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix}46 & 3 & -9\\ 0 & 5 & 3\\ 14 & -4 & 7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\\8\end{pmatrix}$$

dann Gauss: Faktor $= L = -R = -\left(-\left(\frac{14}{46}\right)\right) = 0.3043$

$$\begin{pmatrix}46 & 3 & -9\\ -0.65217 & 5 & 3\\ 0.3043 & -4 & 7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\\8\end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix}46 & 3 & -9\\ 0 & 5 & 3\\ 14 & -4 & 7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\\8\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}46 & 3 & -9\\ 0 & 5 & 3\\ 0 & -4 & 7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\\8\end{pmatrix} = 0 \qquad \text{si}=\begin{pmatrix}\cdots\\ 3+5=8\\ 4+7=11\end{pmatrix} \qquad \text{qi}=\frac{|\text{Matrizenelement}|}{\text{si}} = \begin{pmatrix}\cdots\\ 0.625\\ 0.3636\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}46 & 3 & -9\\ 0 & 5 & 3\\ 0 & -4 & 7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\\8\end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \text{lassen, weil oberes qi} > \text{unteres qi}$$

...

$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2$
$4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 9$
$8x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 13$

x_1	x_2	x_3		
3	2	-4	-2	$\cdot 8$
4	-5	3	9	$\cdot 6$
8	7	-9	13	$\cdot 3$
24	16	-32	-16	$: 8$
24	-30	18	54	II - I
24	21	-27	39	III - I
3	2	-4	-2	
0	-46	50	70	$:2$ II $\rightleftarrows$ III
0	5	5	55	$:5$
3	2	-4	-2	
0	1	1	11	$\cdot 23$
0	-23	25	35	
3	2	-4	-2	
0	23	23	253	$: 23$
0	-23	25	35	III + II
3	2	-4	-2	
0	1	1	11	
0	0	48	288	

Tauschen von Zeilen Permutationsmatrix und Permutationsvektor:

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 6 & 2\\ 9 & 7 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\\ P_1\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}9 & 7 & 1\\ 3 & 6 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\\ P_2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}9 & 7 & 1\\ 1 & 2 & 5\\ 3 & 6 & 2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\end{array}$$

Permutationsvektor : Matrize für den Algorythmus

Immer dort 1 setzen, wo ich die Zeile hinhaben will!

$P_2 * P_1 * A$

$$\begin{array}{cc} * & \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ \text{Permutationsmatrix } P = P_2 * P_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

$P * A = L * R$

$P\left(A * \underline{x} + \underline{b}\right) = 0$

$P * A * \underline{x} + P\underline{b} = 0$

$L * R * \underline{x} + P\underline{b} = 0$

1. $L * \underline{y} + P * \underline{b} = 0$

2. $R * \underline{x} - \underline{y} = 0$

Inverse Matrizen:

$7 * x = 21 \quad \rightarrow \quad \text{inverse} \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{7} * 21$

$A * A^{-1} = 1(\text{Einheitsmatrix}) \quad \rightarrow \quad A * \underline{X} = 1(\text{Einheitsmatrix})$

$$\begin{array}{cccc} * & \begin{pmatrix}x_{11}\\ x_{21}\\ x_{31}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}x_{12}\\ x_{22}\\ x_{32}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}x_{13}\\ x_{23}\\ x_{33}\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{matrix} & \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{array}$$

$A = L * R \qquad b^{(1)} = -\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$L * R * \underline{x}^{(1)} + b^{(1)} = 0$

$A * \underline{z} + b = 0$

$A * \underline{z} = -b$

$\underline{z} = A^{-1} * (-b)$

$A * X^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$A * X^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$A * X^{(3)} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Ausgleichsrechnung:

$C * \underline{x} + \underline{d} = 0$

$C * \underline{x} + \underline{d} = r$

Einführen des Residuum r, da Gauss nur mit Gleichviel Unbekannten wie Gleichungen auskommt.

$\underline{x}^T * C^T + d^T = r^T$

$r * r^T =$ **minimal, da Fehlerfunktion**

$$\left(\underline{x}^T * C^T + \underline{d}^T\right) * \left(C * \underline{x} + \underline{d}\right) = \underline{x}^T * C^T * C * \underline{x} + \underline{x}^T * C^T * \underline{d} + \underline{d}^T * C * \underline{x} + \underline{d}^T * \underline{d}$$

$$\left(C^T * \underline{d}\right)^T * \underline{x}$$

$$F(x) = \underline{x}^T * C^T * C * \underline{x} + 2 * \left(C^T * \underline{d}\right) * x + d^T * d = r * r^T = \text{Fehlerfunktion} = \text{minimal}$$

$C^T * C = A$

$C^T * d = B$

$$F(x) = x^T * A * x + 2 * B * x + d * d^T = r * r^T \rightarrow \text{minimal}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 2 * \sum_{j=1}^{n} a_{ij} * x_j + 2 * b_i$$

minimal $\rightarrow F'(x) = A * x + B = 0$

Beispiel :

$f(t) = c_0 + c_1 * x + c_2 * x^2$

Messwerte :

$f(0) = 1 \;\; = c_0$

$f(1) = 3 \;\; = c_0 + c_1 + c_3$

$f(3) = 2 = c_0 + 3 * c_1 + 9 * c_2$

$f(5) = 6 = c_0 + 5 * c_1 + 25 * c_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$$

$A * x + B = 0 \qquad B = C^T * d \qquad A = C^T * c$

$$* \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 9 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 9 & 35 \\ 9 & 35 & 153 \\ 35 & 153 & 707 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 \\ -39 \\ -171 \end{pmatrix}$$

$$A * x + B = 0 \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 4 & 9 & 35 \\ 9 & 35 & 153 \\ 35 & 153 & 707 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ -39 \\ -171 \end{pmatrix} = 0$$

RechtsdreiecksMatrix und LinksdreiecksMatrix:

$$\text{RechtsdreiecksMatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{LinksdreiecksMatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 1 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{pmatrix}$$

Ausgleichsrechnung Beispiel:

gegeben Messtellen $(t_i, f_i) = ((1,2),(2,2.5),(3,4),(4,7),(5,20),(6,40))$

gesucht $f(t)=c_0+c_1*e^t$

mit Gauss:

$$\begin{pmatrix}1 & e^1\\1 & e^2\\1 & e^3\\1 & e^4\\1 & e^5\\1 & e^6\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}c_0\\c_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-2.5\\-4\\-7\\-20\\-40\end{pmatrix}=r$$

$A=C^T*C$

$b=C^T*d$

$$\begin{array}{ccc} * & \begin{pmatrix}1 & e^1\\1 & e^2\\1 & e^3\\1 & e^4\\1 & e^5\\1 & e^6\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-2\\-2.5\\-4\\-7\\-20\\-40\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\e^1 & e^2 & e^3 & e^4 & e^5 & e^6\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}6 & 636.632977\\636.632977 & 188227.63\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-75.5\\-19591.9\end{pmatrix}\end{array}$$

$A*x+b=0$

L – R zerlegung:

$$\begin{array}{ccc} * & \begin{pmatrix}6 & 636.632977\\636.632977 & 188227.63\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-75.5\\-19591.9\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 0\\-106.1 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}6 & 636.632977\\0 & 120680.1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-75.5\\-11581.35\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}6 & 636.632977\\0 & 120680.1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-75.5\\-11581.35\end{pmatrix}=0$$

$$c_1=\frac{11581.35}{120680.1}$$

$$c_0=\frac{75.5-636.632977*c_1}{6}$$

Differenzieren bei Matrizen:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=2*\sum_{j=1}^{n}a_{ij}*x_j+2*b_i$$

$$\begin{array}{cc} * & \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}a_{11}*x_1+a_{21}*x_2+a_{13}*x_3\\a_{21}*x_1+a_{22}*x_2+a_{23}*x_3\\a_{31}*x_1+a_{32}*x_2+a_{33}*x_3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix} & \begin{array}{l}x_1*(a_{11}*x_1+a_{21}*x_2+a_{13}*x_3)+\\x_2*(a_{21}*x_1+a_{22}*x_2+a_{23}*x_3)+\\x_3*(a_{31}*x_1+a_{32}*x_2+a_{33}*x_3)\end{array}\end{array}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=2*(a_{11}*x_1+a_{21}*x_2+a_{13}*x_3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}=2*(a_{21}*x_1+a_{22}*x_2+a_{23}*x_3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3}=2*(a_{31}*x_1+a_{32}*x_2+a_{33}*x_3)$$

Symmetrie bei $x*x^T$:

$$\begin{array}{cc} * & \begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\3 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\\5 & 7 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 5\\2 & 2 & 1 & 7\\5 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}36 & 44 & 15\\44 & 58 & 21\\15 & 21 & 31\end{pmatrix}\end{array}$$

Q – R zerlegung $\rightarrow$ geht auch mit nichtquadratischen Matrizen:

Idee $Q*Q^T = \text{Einheitsmatrix}$

Konditionszahl $\kappa(Q) = 1$

länge des Vektoren wird nicht verändert $\|y\|_2 = \|Q*x\|_2 = \|x\|_2$

$$\begin{array}{ll} i=2 & \\ k=3 & \end{array} \quad * \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{pmatrix}$$

$$Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21}*\cos(\varphi)+c_{31}*\sin(\varphi) & c_{22}*\cos(\varphi)+c_{32}*\sin(\varphi) & c_{23}*\cos(\varphi)+c_{33}*\sin(\varphi) \\ -c_{21}*\sin(\varphi)+c_{31}*\cos(\varphi) & -c_{22}*\sin(\varphi)+c_{32}*\cos(\varphi) & -c_{23}*\sin(\varphi)+c_{33}*\cos(\varphi) \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{pmatrix}$$

$c_{31} = 0$

$-c_{21}*\sin(\varphi)+c_{31}*\cos(\varphi) = 0$

$c_{21}*\sin(\varphi) = c_{31}*\cos(\varphi)$

$$\frac{c_{21}}{c_{31}} = \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} = \cot(\varphi) = t$$

$$\sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$\cos(\varphi) = t*\sin(\varphi)$

$$Q^T * C = \text{RechtsdreiecksMatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kolonnenweise Strategie:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{pmatrix}$$

$c_{21} = 0$	k=2	i=1	$Q^T{}_{12}$
$c_{31} = 0$	k=3	i=1	$Q^T{}_{13}$
$c_{41} = 0$	k=4	i=1	$Q^T{}_{14}$
$c_{31} = 0$	k=3	i=2	$Q^T{}_{23}$
$c_{41} = 0$	k=4	i=2	$Q^T{}_{24}$
$c_{43} = 0$	k=4	i=3	$Q^T{}_{34}$

$Q^T{}_{34}*Q^T{}_{24}*Q^T{}_{23}*Q^T{}_{14}*Q^T{}_{13}*Q^T{}_{12}*C$

$Q = Q^T{}_{34}*Q^T{}_{24}*Q^T{}_{23}*Q^T{}_{14}*Q^T{}_{13}*Q^T{}_{12}$

Zeilenweise Strategie $\rightarrow$ kann erweitert werden mit neuen Zeilen:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{pmatrix}$$

$.....Q^T{}_{34}*Q^T{}_{24}*Q^T{}_{14}*Q^T{}_{23}*Q^T{}_{13}*Q^T{}_{12}*C$

$Q = ...Q^T{}_{34}*Q^T{}_{24}*Q^T{}_{14}*Q^T{}_{23}*Q^T{}_{13}*Q^T{}_{12}$

$$\begin{array}{l} \\ Q^T{}_{ik}(\varphi) = \end{array} \begin{array}{c|cccccc} & & \boxed{i} & & & \boxed{k} & \\ \hline \boxed{i} & 1 & & & & & \\ & & \cos(\varphi) & & & \sin(\varphi) & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ \boxed{k} & & -\sin(\varphi) & & & \cos(\varphi) & \\ & & & & & & 1 \end{array}$$

die Zeile i'=i* $\cos(\varphi) + k*\sin(\varphi)$

die Zeile k'=-i* $\sin(\varphi) + k*\cos(\varphi)$

$Q^T * C = \text{Rechtsdreicksmatrix}$

$Q^T * C = R \qquad |*Q$

$Q*Q^T*C = Q*R$

$C = Q*R$

v

$Q*R*x + d = r \qquad |*Q^T$

$Q^T*Q*R*x + Q^T*d = Q^T*r$

$R*x + Q^T*d = Q^T*r \qquad Q^T*d = \hat{d} \qquad Q^T*r = \hat{r}$

$$\begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{d}_0 \\ \hat{d}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{r}_0 \\ \hat{r}_1 \end{pmatrix}$$

$R_0 * x + \widehat{d_0} = \widehat{r_0}$

$0 + \widehat{d_1} = \widehat{r_1}$

$\hat{r}_0 = R_0 * x + \widehat{d_0} \qquad \hat{r}_0 = \text{minimal} = 0$

$\hat{r}_1 = \widehat{d_1}$

$R_0 * x + \widehat{d_0} = 0$

Beispiel :
$A*X+b=0$

$$t=\frac{c_{ij}}{c_{kj}} \qquad \sin(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \cos(\varphi)=t*\sin(\varphi)$$

b Vektor mitrechnen

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix}30\\20\\10\end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$i=1 \quad k=2$

$$* \quad \begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix} \quad t=\frac{1}{-1} \quad \sin(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos(\alpha)=t*\sin(\alpha)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$Q_{21}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha)&\sin(\alpha)&0\\-\sin(\alpha)&\cos(\alpha)&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\alpha)-\sin(\alpha)&2*\sin(\alpha)-\cos(\alpha)&0\\-\sin(\alpha)-\cos(\alpha)&\sin(\alpha)+2*\cos(\alpha)&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$i=2 \quad k=3$

$$* \quad \begin{pmatrix}-\sqrt{2}&\frac{3}{2}*\sqrt{2}&0\\0&-\frac{\sqrt{2}}{2}&1\\0&-1&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}30\\20\\10\end{pmatrix} \qquad t=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3} \quad \cos(\alpha)=t*\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}*\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$Q_{23}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos(\alpha)&\sin(\alpha)\\0&-\sin(\alpha)&\cos(\alpha)\end{pmatrix}$$

$$Q_{23}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{3}\\0&-\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-\sqrt{2}&\frac{3}{2}*\sqrt{2}&0\\0&-\frac{\sqrt{6}}{2}&\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}\\0&0&-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30\\20*\frac{\sqrt{3}}{3}+10*\frac{\sqrt{6}}{3}\\-20*\frac{\sqrt{6}}{3}+10*\frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$$

$\downarrow$

....

$\downarrow$

$$\text{bis} \quad \begin{pmatrix}-\sqrt{2}&\frac{3}{2}*\sqrt{2}&0\\0&0&\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

da 3 Gleichungen und 2 Unbekannte gibts am schluss **0 = eine Zahl = Messfehler**

Lagrange – Interpolation → **kein Fehler wird mitberechnet wie bei der Ausgleichsrechnung**

n+1 Stützstellen (x_i, y_i)

$$R_n(x) = a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2 + \ldots + a_n * x^n$$

$$P_n(x) = y_i$$

n + 1 Stützstellen = ein Polynom n-ten Grades

$$L_i = \frac{(x - x_0)*(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)*(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})*(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

$$L_i(x_k) = \begin{matrix} 1, \text{ falls } i=k \\ 0, \text{ falls } i \neq k \end{matrix}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (y_i) * \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

$$= \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) * \sum_{i=0}^{n} \left(y_i * \frac{1}{x - x_i} * \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(\frac{1}{x_i - x_j} \right) \right) \qquad \mu \qquad \lambda$$

$$\mu = \frac{\lambda_i}{x - x_i}$$

$$P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) * \sum_{i=0}^{n} (y_i * \mu_i)$$

$y_i = 1$ $\quad i = 0 \ldots n$ $\quad$ **einsetzen**

$$P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) * \sum_{i=0}^{n} (\mu_i) = 1 \qquad \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} (\mu_i)}$$

$$P_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i * \mu_i}{\sum_{i=0}^{n} \mu_i} \quad \rightarrow \quad \text{baryzentrische Formel}$$

$$\lambda_i^{(n+1)} = \frac{\lambda_i^{(n)}}{x_i - x_{n+1}} \quad \rightarrow \quad \text{Rekursionsbeziehung}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i^{(n)} = 0$$

$$\lambda^{(n+1)}{}_{n+1} = -\sum_{i=0}^{n} \lambda_i^{(n+1)}$$

$$y^3{}_0 + y^3{}_1 + y^3{}_2 + y^3{}_3 = 0$$

Code:

$y^0{}_0 = 1$

für $k = 1, 2, \ldots, n$:

für $i = 0, 1, \ldots, k-1$:

$$\lambda^{(k)}{}_i = \frac{\lambda^{(k-1)}{}_i}{x_i - x_k}$$

$$\lambda^{(k)} = -\sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{(k)}{}_i$$

Bei mehr Gleichungen als Unbekannte.
Kann n-mal abgeleitet werden.

3 Stützpunkte = Polynom 2.Grades

Ein Beispiel:

$x = 1 \quad 3 \quad 4 \quad 6$

$y = 1 \quad 1.5 \quad 0.5 \quad 1$

$\lambda^0{}_0 = 1$

$$\lambda^k{}_i = \frac{\lambda^{(k-1)}{}_i}{x_i - x_k}$$

$$\lambda^k{}_k = -\sum_{i=0}^{k-1} \lambda^{(k)}{}_i$$

$$y_i = \frac{\lambda_i}{x - x_i}$$

λ in der Tabelle

i k	0 x=1 y=1	1 x=3 y=1.5	2 x=4 y=0.5	3 x=6 y=1
0 x=1 y=1	$\lambda^0{}_0=1$ 1 fix			
1 x=3 y=1.5	$\lambda^{(k-1)}{}_i / (x_i-x_k)$ -1/2	$-\sum_{i=0}^{k-1}\lambda^{(k)}{}_i$ 1/2		
2 x=4 y=0.5	$\lambda^{(k-1)}{}_i / (x_i-x_k)$ 1/6	$\lambda^{(k-1)}{}_i / (x_i-x_k)$ -1/2	$-\sum_{i=0}^{k-1}\lambda^{(k)}{}_i$ 1/3	
3 x=6 y=1	$\lambda^{(k-1)}{}_i / (x_i-x_k)$ -1/30	$\lambda^{(k-1)}{}_i / (x_i-x_k)$ 1/6	$\lambda^{(k-1)}{}_i / (x_i-x_k)$ -1/6	$-\sum_{i=0}^{k-1}\lambda^{(k)}{}_i$ 1/30
μ_i	$\lambda_i/(x-x_i)$ -1/75 $\left(\frac{-\frac{1}{30}}{3.5-1}\right)$	$\lambda_i/(x-x_i)$ 1/3 $\left(\frac{\frac{1}{6}}{3.5-3}\right)$	$\lambda_i/(x-x_i)$ 1/3 $\left(\frac{-\frac{1}{6}}{3.5-4}\right)$	$\lambda_i/(x-x_i)$ -1/75 $\left(\frac{\frac{1}{30}}{3.5-6}\right)$
$\mu_i * y_i$	-1/75	1/2	1/6	-1/75

Ab hier einen Funktions-
punkt festlegen

Wert an der Stelle x = 3.5:

$$P_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i * \mu_i}{\sum_{i=0}^{n} \mu_i} = \frac{\frac{48}{75}}{\frac{48}{75}} = 1$$

Spline Interpolation : Hermite interpolation

1.Bestimmen des Intervalls

2.Berechnen des Parameters $h_i = x_{i+1} - x_i$

3.Berechnen des Parameters $t = \frac{x - x_i}{h_i}$

4.Auswerten des Polynoms: $Q_i(t) = f_i * (1 - 3*t^2 + 2*t^3) + f_{i+1} * (3*t^2 - 2*t^3) + h_i * f'_i * t * (1-t)^2 + h_i * f'_{i+1} * t^2 * (t-1)$

Beispiel :

x_i	f_i	f'_i
1	2	1
3	4	0.5
5	3	−1

$t = \frac{x-1}{2}$

$h_i = 2$

$Q_1(t) = 2*(1-3*t^2+2*t^3) + 4*(3*t^2-2*t^3) + 2*(t-2*t^2+t^3) + (-t^2+t^3)$

$t = \frac{x-3}{2}$

$h_2 = 2$

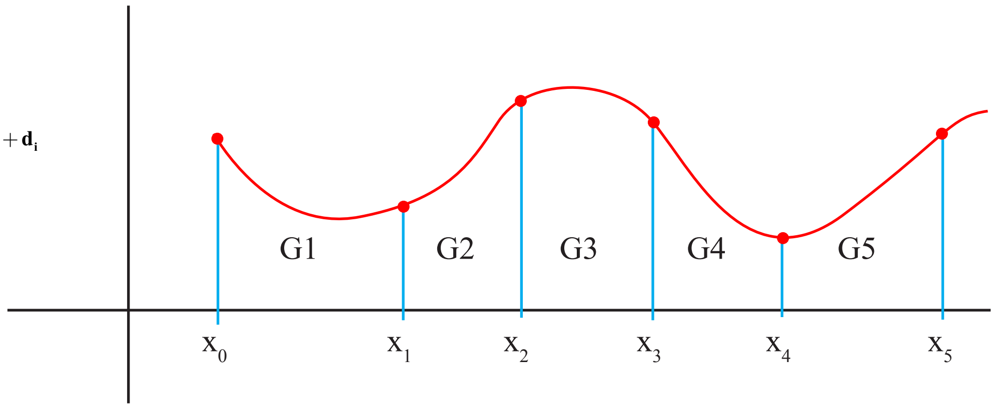
$Q_2 t = 3*(1-3*t^2+2*t^3) + 5*(3*t^2-2*t^3) + (t-2*t^2+t^3) - 2*(-t^2+t^3)$

Spline Interpolation : natürliche Splineinterpolation:

bei 6 Stützstellen = 5 h

5 h = 4y''

3Stützstellen = 1 Formel



$h_i = x_{i+1} - x_i$

$s_i = a_i * (x - x_i) + b_i * (x - x_i) + c_i * (x - x_i) + d_i$

$a_i = \frac{1}{6*h_i} * (y''_{i+1} - y''_i)$

$b_i = \frac{1}{2} * y''_i$

$c_i = \frac{1}{h_i} * (y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{6} * h_i * (y''_{i+1} + 2*y''_i)$

$d_i = y_i$

$y''_0 = y''_n = 0$

$$\begin{pmatrix} 2*(h_0+h_1) & h_1 & 0 & 0 \\ h_1 & 2*(h_1+h_2) & h_2 & 0 \\ 0 & h_2 & 2*(h_2+h_3) & h_3 \\ 0 & 0 & h_3 & 2*(h_3+h_4) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y''_1 \\ y''_2 \\ y''_3 \\ y''_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{h_0}*(y_1-y_0) - \frac{6}{h_1}*(y_2-y_1) \\ \frac{6}{h_1}*(y_2-y_1) - \frac{6}{h_2}*(y_3-y_2) \\ \frac{6}{h_2}*(y_3-y_2) - \frac{6}{h_3}*(y_4-y_3) \\ \frac{6}{h_3}*(y_4-y_3) - \frac{6}{h_4}*(y_5-y_4) \end{pmatrix} = 0$$

$\rightarrow$ **ausrechen** $y''_1 - y''_4$

$\rightarrow$ **ausrechen** $a_0 - a_n,\ b_0 - b_n,\ c_0 - c_n,\ d_0 - d_n$

$\rightarrow$ **ausrechen** $s_0 - s_n$

Differentialgleichungen:

Euler:

$h = x_{n+1} - x_n$

$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h * f(x_n, y_n)$

Heun $\rightarrow$ **Mit der Trapezregel ergibt sich näherungsweise:**

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} * (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$

Prädikator $y^*_{n+1} = y_n + h * y' = y_n + h * f(x_n, y_n)$

Runge Kutta:

$k_1 = f(x_k, y_k)$

$k_2 = f\left(x_k + \frac{1}{2} * h, y_k + \frac{1}{2} * h * k_1\right)$

$k_3 = f\left(x_k + \frac{1}{2} * h, y_k + \frac{1}{2} * h * k_2\right)$

$k_4 = f(x_k + h, y_k + h * k_3)$

$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6} * h * (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$

Erster Schritt bei Heun und Runge-Kutta:

Euler:

$k_1 = f(x_k, y_k)$

im Biespiel:

$k_1 = \begin{pmatrix} y_2 \\ \dfrac{y_2 - \frac{1}{3} * y_2^3 - y_1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$ **mit** $\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$ **als** $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Lösen von Sytemen von DGL und DGL höherer Ordnung:

Um eine Gleichung zweiten Grades mit einem Interpolationsverfahren (nach Euler, Heun, Runge-Kutta) lösen zu können, muss die Gleichung in ein Gleichungssystem ersten Grades umgewandelt werden.

Ziel ist eine Gleichung in der Form:

$y' = f(x, y)$

Bsp:

$\varepsilon * y'' - y' + \frac{1}{3} * y'^3 + y = 0$

$y' = \frac{dy}{dt}$ $y(0)=0.5$ $y'(0)=0$ $\varepsilon = 0.125$

Die DGL 2.Ordnung wird dabei umgewandelt in ein System von 2 Gleichungen 1.Ordnung.

Dabei ist $y_1 = y$ **und** $y_2 = y'$ **oder in Vektorform:**

$y'' = \dfrac{y' - \frac{1}{3} y''' - y}{\varepsilon}$

$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ $f(x,y) = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ f(x, y_1(x), y_2(x)) \end{pmatrix}$

$y' = f(x, y(x))$

mit Zahlen eingesetzt:

$y_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$ $f(x,y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ \dfrac{y_2 - \frac{1}{3} * y_2^3 - y_1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$

Zur Lösung des Problems kann die Runge-Kutta Methode 4.Ordnung herbeigezogen werden

$y'' = \lambda$ $y(0) = 0.5$ $y'(0)=0$

$y_1 = y$ $y_2 = y'$

Startverktor $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$

$\underline{y}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ \lambda \end{pmatrix}$

$y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ $f(x,y) = \begin{pmatrix} y_2 x \\ f(x, y_1(x), y_2(x)) \end{pmatrix}$

$y' = f(x, y(x))$

Runge Kutta:

$y_k = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$