Negation $\neg$
Konjunktion $\wedge$ (*und*)
Disjunktion $\vee$ (*oder*)
Alternative >-< (exklusives oder) Entweder oder, false bei beiden
Subjunktion $\rightarrow$
Bisubjunktion $\leftrightarrow$ (Äquivalenz)

Taurologie : immer wahr
Kontradiktion : immer falsch

Bindungsstärke : $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
konjunktive Normalform : $(L_{11} \vee \ldots \vee L_{1i}) \wedge (\ldots) \wedge \ldots = \{\{A, B, C\}, \{E, F, G\}\}$
disjunktive Normalform : $(L_{11} \wedge \ldots \wedge L_{1i}) \vee (\ldots) \vee \ldots$

kanonische konjunktive NF : Funktionswerte f invertieren
kanonische disjunktive NF : Funktionswerte w

Doppelte Negation	$\neg(\neg p)$	p
Ausgeschlossener Widerspruch	$\neg p \wedge p$	falsch
Ausgeschlossener Dritter	$\neg p \vee p$	wahr
Identität	p	p
Negation der Diskonjunktion (1. De Morgan)	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
Negation der Konjunktion (2. De Morgan)	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
Kommutativgesetz der Disjunktion	$p \vee q$	$q \vee p$
Kommutativgesetz der Konjunktion	$p \wedge q$	$q \wedge p$
Idempotenzgesetz der Disjunktion	$p \vee p$	p
Idempotenzgesetz der Konjuntion	$p \wedge p$	p
Assoziativgesetz der Disjunktion	$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r$
Assoziativgesetz der Konjunktion	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$
Absorbtionsgesetz der Disjunktion	$p \vee (p \wedge q)$	p
Absorbtionsgesetz der Konjunktion	$p \wedge (p \vee q)$	p
Distributivgesetz der Disjunktion	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Distributivgesetz der Konjunktion	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Rückführung der Bisubjuktion zur Subjunktion	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
Rückführung der Subjunkttion auf Disjunktion	$(p \rightarrow q)$	$\neg p \vee q$
Rückführung der Alternative auf Disjunktion	p>-<q	$(p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$
Kontraposition	$(p \rightarrow q)$	$(\neg q \rightarrow \neg p)$
Modus Ponens	$p \wedge (p \rightarrow q)$	q
Modus Tollens	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$	$\neg q$
Modus Barbara	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow r)$

$\neg (p \wedge q) \vee p = (\neg p \vee \neg q) \vee \neg p$
$A \rightarrow \neg C = \neg A \vee \neg C = \neg(A \wedge C)$

Vorgehensweise, um Formeln n KNF umzuwandeln:
ersetze alle Äquivalenzen $A \leftrightarrow B$ durch $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
ersetze alle Suvjunktionen $A \rightarrow B$ durch $\neg A \vee B$
verschiebe die Negation bis zu den aussagelogischen Variablen
entferne doppelte Negationen
transformiere auf KNF durch Ausmultiplizieren (Distributivgesetz)

Beispiel:
$\neg(A \vee B) \leftrightarrow C$
$(\neg(A \vee B) \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow \neg(A \vee B))$
$(\neg\neg(A \vee B) \vee C) \wedge (\neg C \vee \neg(A \vee B))$
$(A \vee B \vee C) \wedge (\neg C \vee (\neg A \vee \neg B))$
$(A \vee B \vee C) \wedge (\neg C \vee \neg A) \wedge (\neg C \vee \neg B)$
In Wahrheitstabelle:

A	B	C	$A \vee B \vee C$	$\neg C \vee \neg A$	$\neg C \vee \neg B$
f	f	f	f	w	w
f	f	w	w	w	w
f	w	f	w	w	w
f	w	w	w	f	f
w	f	f	w	w	w
w	f	w	w	w	w
w	w	f	w	f	w
w	w	w	w	f	f

wenn alle wahr, kommen diese Zeilen in Frage!!!

Neues Wissen mit Inferenzregeln:
Interferenzregeln geben an, wie aus Formeln in der Wissensbasis neue Formeln abgeleitet weren können.
Korrekte Interferenzregeln erzeugen nur Formeln, die aus der Wissensbasis logisch folgen.
Kalkül: Kalkül ist eine Menge von Inferenzregeln.
Beweis: Semantische Beweis (Relationen zwischen logischen Formeln untersuchen -> Wahrheitstabelle)
Syntaktische Beweis (Formeln untersuchen bezüglich ihrer Ableitbarkeit -> Inferenzregeln)

Bsp: Beweisen Sie, dass Q eine logische Folgerung ist
$F=\{P \vee Q,\ P \rightarrow \neg Q,\ \neg P\}$
1.Mengendarstellung (KNF) erstellen $F=\{\{P,Q\},\{\neg P,\neg Q\},\{\neg P\}\}$
2.setze $\neg Q$ als Behauptung (Negation der logischen Folgerung) in die Wissensbasis
$F=\{\{P,Q\},\{\neg P,\neg Q\},\{\neg P\},\{\neg Q\}\}$
$F=Res^0(F) = \{\{P,Q\},\{\neg P,\neg Q\},\{\neg P\},\{\neg Q\}, \{Q\}\}$ $\quad R^1=\{Q\}$
$F=Res^1(F) = \{\{P,Q\},\{\neg P,\neg Q\},\{\neg P\},\{\neg Q\},\{Q\}\}$ $\quad R^2=\{\}=\square$
$F=Res^3(F) = \{\{P,Q\},\{\neg P,\neg Q\},\{\neg P\}, \{\neg Q\} ,\{Q\},\{\square\}\}$
Da F eine leere Menge enthält, ist die Formelmenge unerfüllbar. Damit ist Q eine logische Flgerung.

Solle eine Folgerung bewiesen werden, so muss die Negation der Annahme (Behauptung) als Ausgagslage in die Wissensbasis aufgenommen werden.

Ist eine formelmenge F unerfüllbar, so ist die logische Folgerung richtig.

$$\frac{F_1, \ldots, F_n}{G}$$
F_i :Prämisse
G :Konklusion

Prädikatenlogik:

Existenzquantor $\exists x$: hat_spass(x) Es existiert ein , so dass gilt
Allquantor $\forall x$: hat_spass(x) für alle gilt

Gesetze:

Negation	$\neg\forall x\ \varphi$	$\exists x\ \neg\varphi$
	$\forall x\ \varphi$	$\neg\exists x\ \neg\varphi$
	$\neg\forall\ \neg\varphi$	$\exists x\ \varphi$
	$\forall x\ \neg\varphi$	$\neg\exists x\ \varphi$
Distribution	$\forall x\ (\varphi\wedge\Psi)$	$\forall x\ \varphi \wedge\ \forall x\ \Psi$
	$\exists x\ (\varphi\vee\Psi)$	$\exists x\ \varphi\ \vee\ \exists x\ \Psi$
	$\forall x\ \varphi\ \vee\ \forall x\ \Psi$	$\forall x\ (\varphi\vee\Psi)$
	$\exists x\ (\varphi\wedge\Psi)$	$\exists x\ \varphi\ \wedge\ \exists x\ \Psi$
Dependenz	$\forall x\ \forall y\ \varphi$	$\forall y\ \forall x\ \varphi$
	$\exists x\ \exists y\ \varphi$	$\exists y\ \exists x\ \varphi$
	$\exists x\ \forall y\ \varphi$	$\forall y\ \exists x\ \varphi$
Bewegung hier wird vorausgesetzt, dass die quantifizierte Variable nicht frei in der Formel vorkommt, die jeweils ausserhalb des Quantoren-Skopus erscheint.	$\varphi\rightarrow\forall x\ \Psi$	$\forall x\ (\varphi\rightarrow\Psi)$
	$\varphi\rightarrow\exists x\ \Psi$	$\exists x\ (\varphi\rightarrow\Psi)$
	$(\forall x\ \varphi)\rightarrow\Psi$	$\exists x\ (\varphi\rightarrow\Psi)$
	$(\exists x\ \varphi)\rightarrow\ \Psi$	$\forall x\ (\varphi\rightarrow\Psi)$

Negation und Negationszeichen entfernen:

Eine Aussage kann durch hinzufügen eines Negationszeichens um die ganze Aussage negiert werden.
Das Negationszeishen kann anschliessend entfernt werden, indem man die Quantoren dreht, d.h ein $\forall$ wird zue einem $\exists$ und ein $\exists$ wird zu einem $\forall$.

Bsp:

$\neg\exists x\ (\forall y\ P(x,y)\ \wedge\ \forall z\ Q(z,x))$ // $\forall y$ und $\forall z$ nach vorne nehmen ->geht nur, wenn die einzelnen Formeln mit $\wedge$ verbunden sind.

$\neg\exists x\ \ \forall y\ \ \forall z\ (P(x,y)\ \wedge\ Q(z,x))$ //$\neg$ entfernen, indem man $\forall$ und $\exists$ umdreht

$\forall x\ \ \exists y\ \ \exists z\ \neg(P(x,y)\ \wedge\ Q(z,x))$ "De Morgan" anwenden

$\forall x\ \ \exists y\ \ \exists z\ (\neg P(x,y)\ \vee\ \neg Q(z,x))$

Skolemizaton:

Dient dazu die Quantoren nach vorne zu bringen und sie anschliessend zu eliminieren, wobei es in erster Linie um die Eliminierung des $\exists$ Quantors geht.

Falls $\exists$ und $\forall$ nicht von der dahinter folgenden Aussage abhängig (kein $\rightarrow\leftrightarrow$) und nur von $\wedge$ und $\vee$ umgeben, kann der Quantor einfach nach vorne genommen werden -> Achtung Reihenfolge!

Bsp. $\forall x\ P(x)\ \vee\ \exists x\ Q(x)$ -> $\forall x\ \exists x$: $P(x)\ \vee\ Q(x)$

$\forall$ oder $\exists$ sind abhängig von der dahinter filgenden Aussage (Quantoren stehen nach $\rightarrow\leftrightarrow$), muss $\exists$ durch eine Skolem-Funktion ersetzt werden -> Substitution mit einer Funktion.

Bsp. $\forall x$ person(x) $\rightarrow$ $\exists y$ herz(y) $\wedge$ haben(x,y) -> $\forall x$ person(x) $\rightarrow$ herz(H(x)) $\wedge$ haben(x,y)

in der Formel muss y durch eine Konstante G erstezt werden, da x nicht von abhängig ist.

$\exists y\ \ \forall x$ (man(x) $\wedge$ (woman(y) $\rightarrow$ loves(x,y)) -> $\forall x$ (man(x) $\wedge$ (woman(G) $\rightarrow$ loves(x,G))

y hängt von x ab und muss durch eiene Funktion dargestellt werden

$\forall x$ (man(x) $\rightarrow$ $\exists y$ (woman(y) $\wedge$ loves(x,y)) -> $\forall x$ (man(x) $\rightarrow$ (woman(G(x)) $\wedge$ loves(x,G(x)))

Prädikatenogik und Resolution:

1.ersetze alle Äquivalenzen $P \leftrightarrow Q$ durch $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
2.ersetze alle Subjunktionenn $P \rightarrow Q$ durch $\neg P \vee Q$
3.Negation (Pränexform) durchführen für Konklusion (Behauptung)
4.entfernen der $\exists$ durch Skolemisation (Substitution durch Funktion)
5.weglassen der aller $\forall$
6.Mengendarstellung bilden (z.B $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \rightarrow \{P, Q\}, \{P, R\}$)

Beispiel:
Gegebene Axiome:
-Alexander ist überschuldet
-Wenn jemand üerschuldet ist, bekommt er von der Bank keinen Kredit
-Wenn jemand von der Bank keinen Kredit bekommt, bekommt er auch keinen von der Kreditanstalt

Gegebene Konklusion:
-Alexander bekommt von der Creditanstalt keinen Kredit

Gegebene Pädikate:
-S(x)=x ist überschuldet
-K(x,y) = x bekommt von y einen Kredit

Prämisse 1: S(alex)
Prämisse 2: $\forall$x (S(x) $\rightarrow$ ¬K(x, Bank))
Prämisse 3: $\forall$x (¬K(x, Bank) $\rightarrow$ ¬K(x, Credit))
Konklusion: ¬K(alex, Credit)

Prämisse 1: S(alex)
Mengendarstellung: {S(alex)}
Prämisse 2: $\forall$x (S(x) $\rightarrow$ ¬K(x, Bank)) //Gesetz $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg p \vee q$ anwenden
$\forall$x (¬S(x) $\vee$ ¬K(x, Bank)) //Skolemization von $\forall$
¬S(x) $\vee$ ¬K(x, Bank)
Mengendarstellung: {¬S(x), ¬K(x, Bank)}
Prämisse 3: $\forall$x (¬K(x, Bank) $\rightarrow$ ¬K(x, Credit)) //Gesetz $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg p \vee q$ anwenden
$\forall$x (K(x, Bank) $\vee$ ¬K(x, Credit)) //Skolemization von $\forall$
K(x, Bank) $\vee$ ¬K(x, Credit)
Mengendarstellung: {K(x, Bank), ¬K(x, Credit)}
Konklusion: ¬K(alex, Credit) //Negation bilden
K(alex, Credit)
Mengendarstellung: {K(alex, Credit)}

Resolution:
Wissensbasis: {{S(alex)}, {¬S(x), ¬K(x, Bank)}, {K(x, Bank), ¬K(x, Credit)}, {K(alex, Credit)}}
{{S(alsex)}, {¬S(x), ¬K(x, Bank)}, {K(x, Bank), ¬K(x, Credit)}, {K(alex, Credit)}, {¬S(x), ¬K(x, Credit)}}
//Substitution in ¬S(x), ¬K(x, Credit) x durch alex ersetzen:
{{S(alsex)}, {¬S(x), ¬K(x, Bank)}, {K(x, Bank), ¬K(x, Credit)}, {K(alex, Credit)}, {¬S(alex), ¬K(alex, Credit)}}
{{S(alsex)}, {¬S(x), ¬K(x, Bank)}, {K(x, Bank), ¬K(x, Credit)}, {K(alex, Credit)}, {¬S(alex), ¬K(alex, Credit)}}
{{S(alsex)}, {¬S(x), ¬K(x, Bank)}, {K(x, Bank), ¬K(x, Credit)}, {K(alex, Credit)}, {¬S(alex), ¬K(alex, Credit)}}

{} = leere Menge $\rightarrow$ damit ist bewiesen, dass die Konklusion gilt!