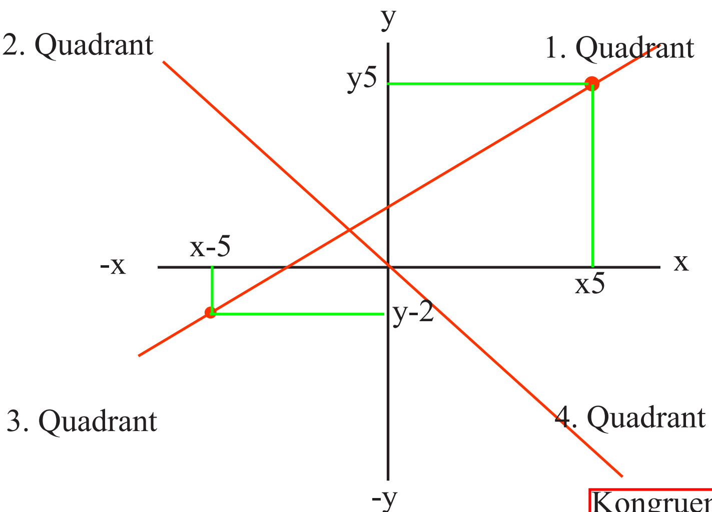
Allgemein:

Funktion = Vorschrift, die jeder Zahl x genau eine andere Zahl zuordnet.

freier Fall: $s(t)=5*t^2$ s=Strecke   t=Zeit
Druck: $p(T)=0.0037*T+1.013$ T=Temperatur   p=Druck

e=Eulersche Zahl=2.718



Definitionsbereich:
$x \geq -1$
$[-1 , \infty]$

Intervall:
Untergrenze / Obergrenze
$x > -1$
$]-1, \infty]$

Kongruenz:
Deckungsgleich z.b zur Parabel x^2, gleiche Öffnung, aber irgendwo in den 4 Quadranten.

Wertetabelle:

x	-5	-2	0	1	2
f(x)	50	8	0	2	8

P = Punkt auf einer Funktion = (1.x, 2.y) = (8, 20)

Arten von Funktionen:

-Quadratische F.
-Lineare F.
-Exponential F.
-Wurzel F.
-Logarythmus F.
-Kehr oder Inverse F.
-Periodische F.
-Potenz F.

Taschenrechner:

-Variable speichern:
Wert / STO→ / Variablenname

-Variablen löschen:
F6 / Clear a-z
F4 / DelVar

-Auflösen nach x:
F2 / Solve
F3 / solve(und, (x,y))

-Funktion definieren:
F4 / Define f(x)=....
-Aufrufen:
y(20)

-Funktion löschen:
F4 / del Var

-mehrere Funktionen mit Graph:
◊ F1 = Funktion definieren
◊ F3 = Graph der Funktionen
F4 = anzeigen oder nicht anzeigen
◊ F2 = Anzeige optimieren
◊ F5 = Werteliste lesen

-Brüche zusammenfassen:
F2 / comDeanom

-Ausklammern:
F2 / factor

-Ausmultiplizieren:
F2 / expand

-Minimum, Maximum einer Funktion
F3 / fMin ($2*x^2+100*x$,x)
F3 / fMax ($-2*x^2+100*x$,x)

-Werte eingrenzen (mit Operator)
wenn nicht quadratisch:
-2*x2+100*x | x=25

bei quadratischen Funktionen:
fMin (Formel , x) | x<4 and x>2
fMax (Formel , x) | x>4 and x>2

Achtung:
fmin und fmax im TR nur für quadratische Funktionen.

$y(x) = x^2 - 2*x + 3$

$f\min\ x = 1$

$f\min\ y = +\infty\ -\infty$

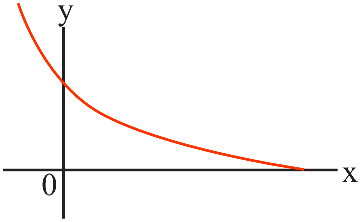
Weil x-399 sein kann, y aber minimal bei x=1 liegt.

im Graphen:
F5 / Minimum / lower Bound / upper B.
F5 / Maximum / lower Bound / upper B.

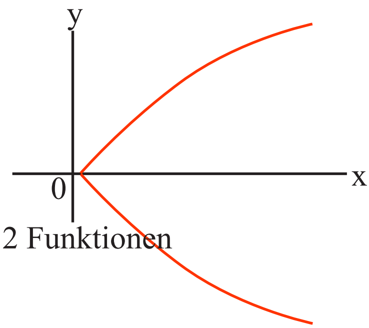
-Ausgabe:
x = 2*e8*π + $\cos^{-1}$*(40)
e8 bedeutet eine natürliche Zahl oder Null.
x = 0 + $\cos^{-1}$*(40)
x= $\cos^{-1}$*(40)

-Scalierung des Graphen gleichmässig:
F2 / Zoom Dec
-Nur positive Werte bei Funktionen (oder min, max usw,):
Catalog / abs()

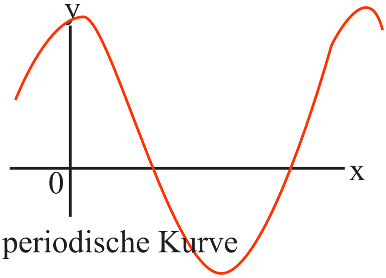
Graphen:



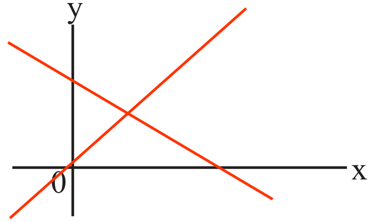
Exponentialkurve, Regressionskurve



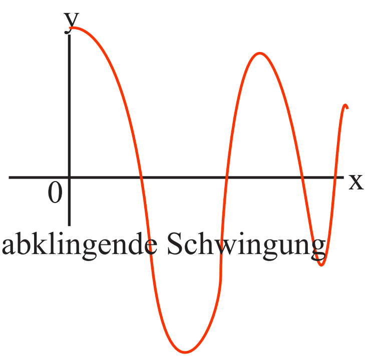
2 Funktionen



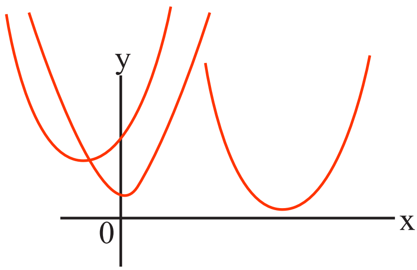
periodische Kurve



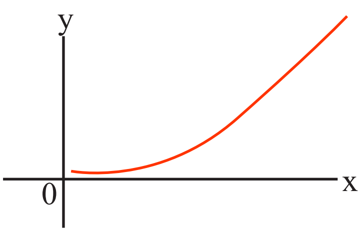
Geraden (lineare Kurven)



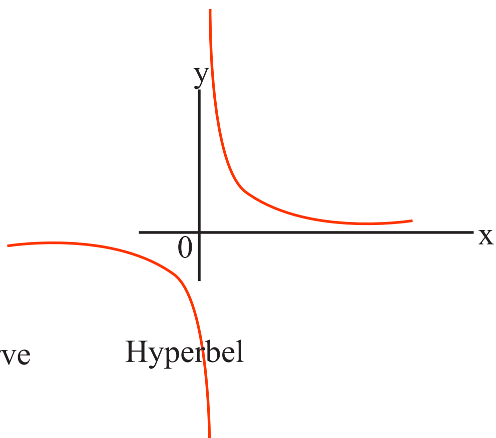
abklingende Schwingung



Parabel



Exponentialkurve, Regressionskurve



Hyperbel

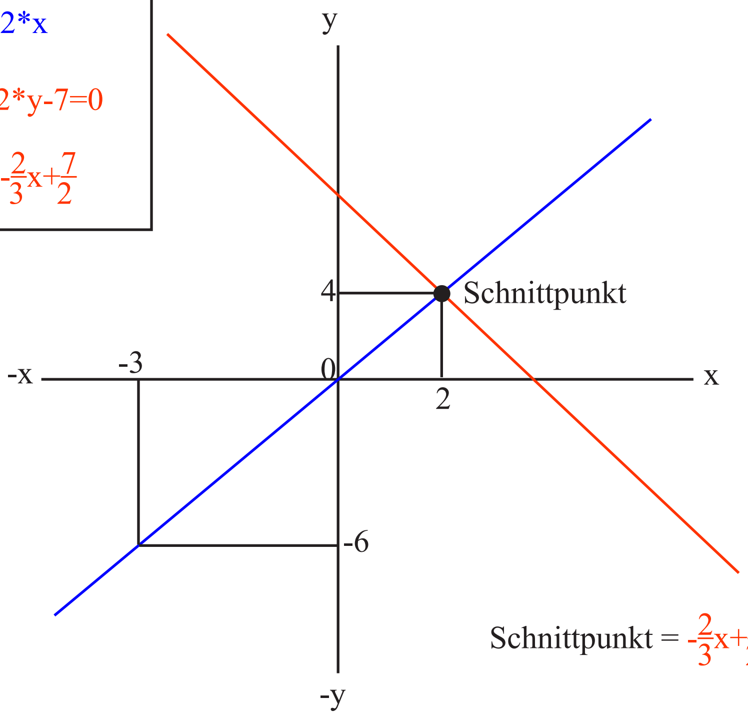
Die Gearde (lineare Funktion):

implizierte Form = $2*x+y-1=0$
explizierte Form (Normalform) = $y(x)=5x-3$

$2*x-y=0$
$y(x)=2*x$

$3*x+2*y-7=0$

$y(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{2}$



Schnittpunkt = $-\frac{2}{3}x+\frac{7}{2} = 2*x$

Normalform:

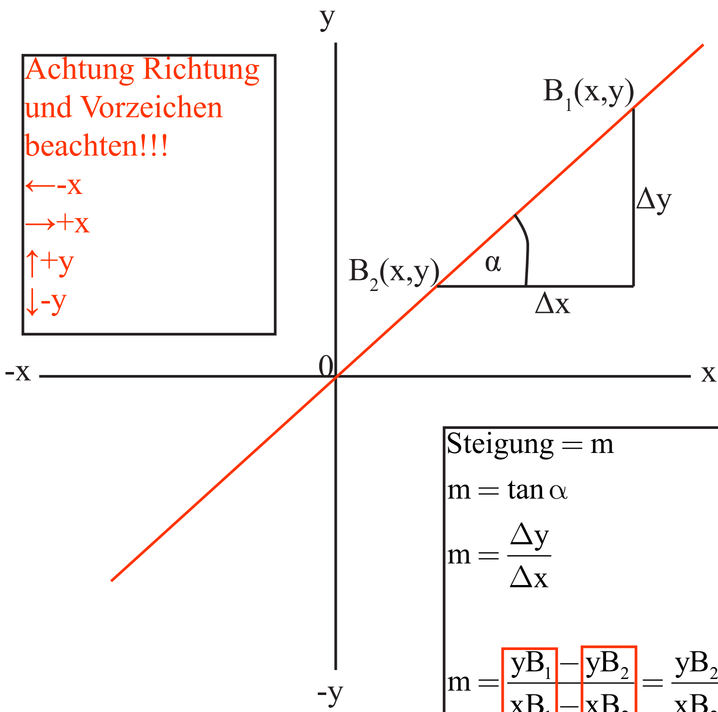
$y(x) = m*x + q$

Steigung = m
Verschiebung (Ordinatenabschnitt) = q

Steigung positiv = 1, 3 Quadrant
Steigung negativ = 2, 4 Quadrant

Liegen drei oder mehr Punkte auf einer Graden, so heisst das kollinear

Berechnung der Steigung:



Steigung = m

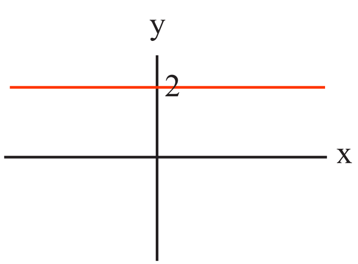
$$m = \tan\alpha$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

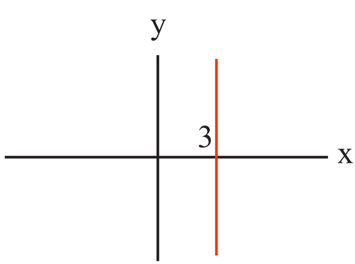
$$m = \frac{yB_1 - yB_2}{xB_1 - xB_2} = \frac{yB_2 - yB_1}{xB_2 - xB_1}$$

Steigung in Prozent:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.1 = \text{Steigung } 10\%$$

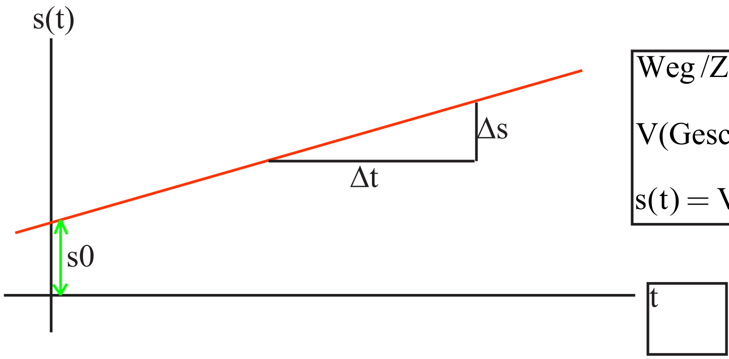


y=q
y=2



x=q
x=3

Bewegungsabläufe:

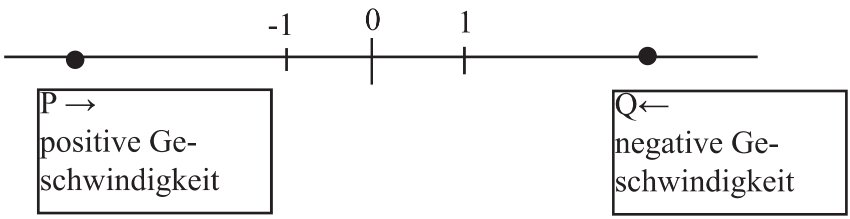


Weg/Zeit Funktion

$$V(\text{Geschwindigkeit}) = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

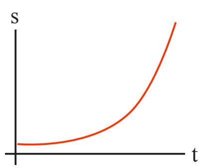
$$s(t) = V * t + s0$$

Bewegungsrichtung:

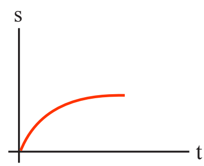


---

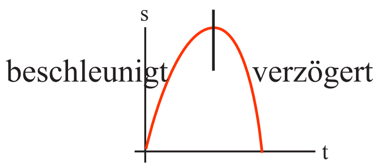
ungleichförmige Bewegungen:



„Anfahren“ positive Beschleunigung



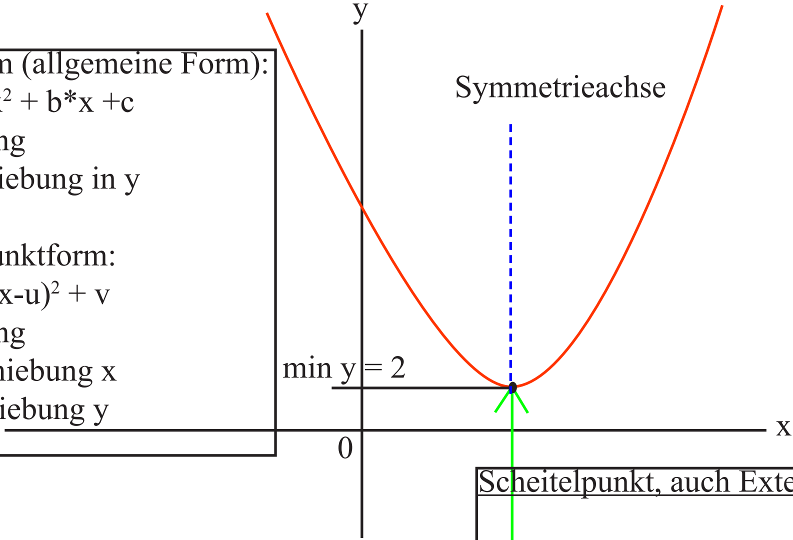
„Abbremsen“ negative Beschleunigung



Die Parabel (Parabel zweiter Ordnung):

Grundform (allgemeine Form):
$y(x) = a*x^2 + b*x +c$
a = Öffnung
c= Verschiebung in y

Scheitelpunktform:
$y(x) = a*(x-u)^2 + v$
a = Öffnung
u = Verschiebung x
v= Verschiebung y

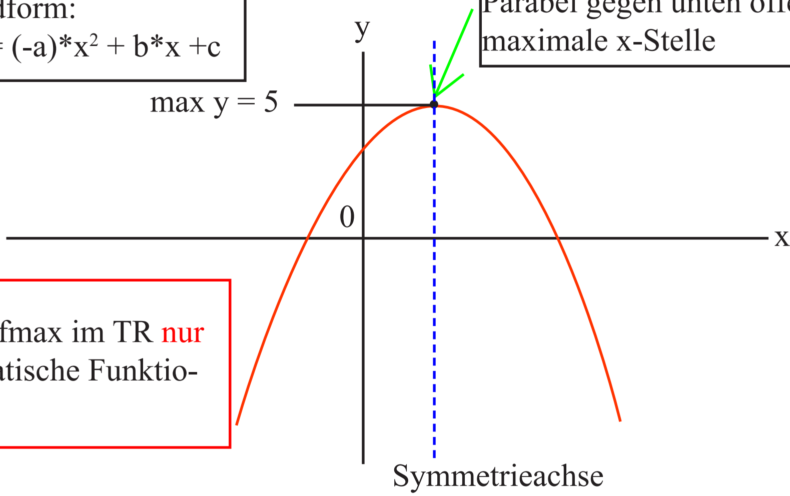


Scheitelpunkt, auch Extemum.

Parabel gegen oben offen:
minimale x-Stelle

Parabel gegen unten offen:
maximale x-Stelle

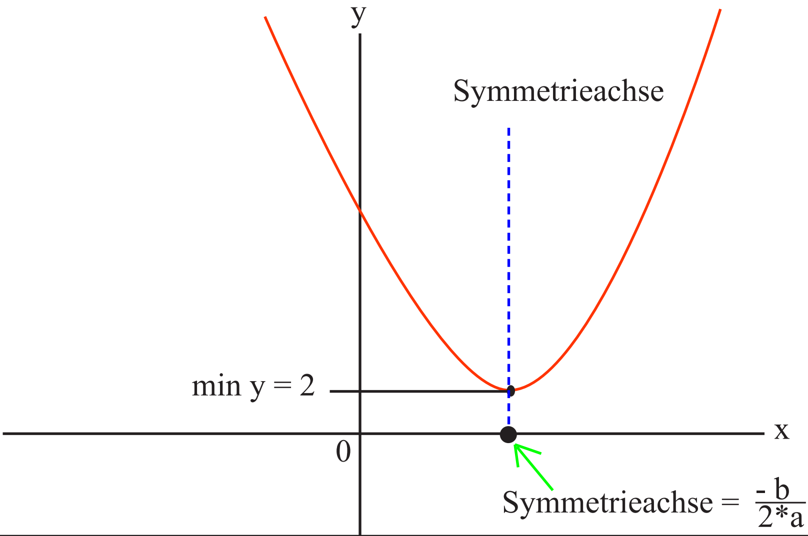
Grundform:
$y(x) = (-a)*x^2 + b*x +c$



Achtung:
fmin und fmax im TR nur für quadratische Funktionen.

$y(x) = x^2 - 2*x + 3$
$f\min\ x = 1$
$f\min\ y = +\infty\ \ -\infty$
Weil x-399 sein kann, y aber minimal bei x=1 liegt.

Scheitelpunktformel:



Grundformel: $y(x)=a*x^2+b*x+c$

Grundformel negativ gegen unten offen: $y(x)=(-a)*x^2+b*x+c$

Scheitelpunktformel: $y(x)=a*(x-\boxed{u})^2+\boxed{v}$

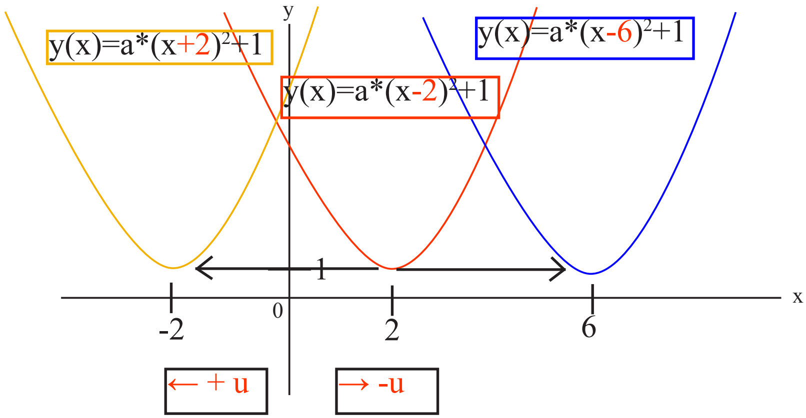
Scheitelpunkt: $\left(\boxed{\frac{-b}{2*a}}, \boxed{\frac{4*a*c-b^2}{4*a}}\right)$

a = Öffnung der Parabel

u= x-Verschiebung der Parabel

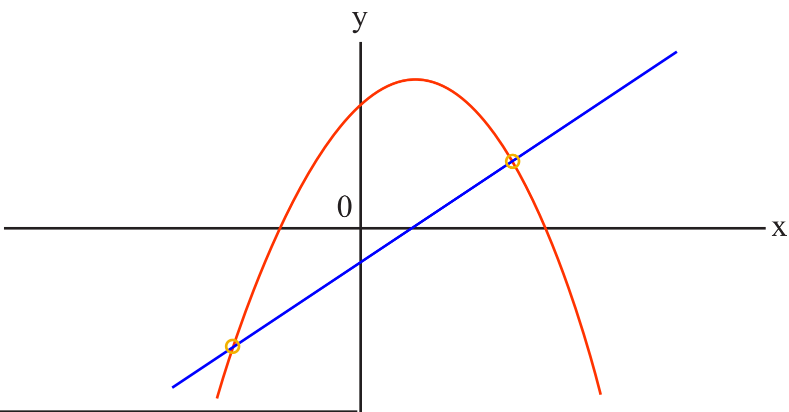
a = Öffnung
u = Verschiebung x-Richtung
v= Verschiebung y-Richtung

Scheitelpunkt = S(u, v)



Falls kompliziert x ausklammern, um quadratischen vom linearem Teil zu trennen!!

Schnittmenge Parabel-Gerade

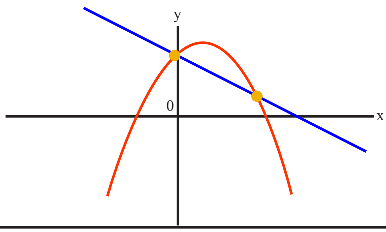


y(x)=x-3

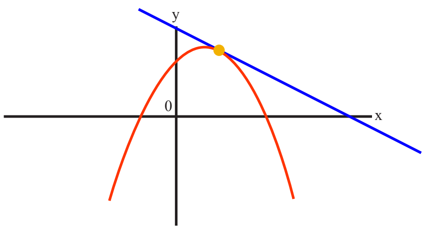
y(x)=-0.5*x²+2*x

Schnittpunk = x-3 = -0.5*x²+2*x

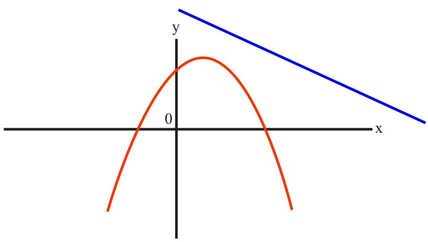
ergibt 2 Resultate, weil zwei Schnittpunkte



Zwei Schnittpunkte
Diskriminante D > 0

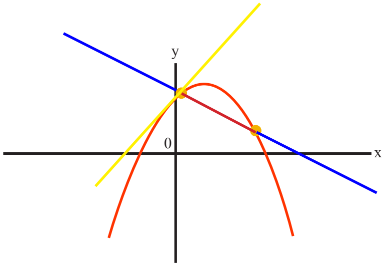


ein Schnittpunkt
Diskriminante D = 0



keinen Schnittpunkt, schneidet sicht
Diskriminante D < 0

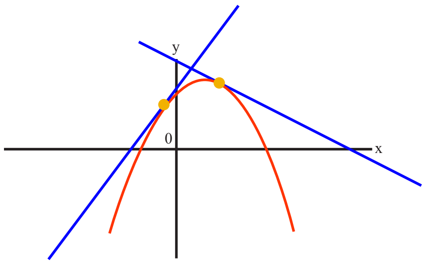
Schnittmenge Parabel-Gerade:



+ Sekante

Tangente, Teil der Sekante innerhalb eines Radiuses

Tangente oder Gerade, berührt Radius nur



Zwei Geraden die die Parabel berühren.
Je ein Schnitt oder Berührungspunkt.

Bekannt Punkte einer Parabel der Grundform $y(x)=a*x^2+b*x+c$

P(2,1) $1=a*2^2+b*2+c$

Q(−1,3)

R(3,4)

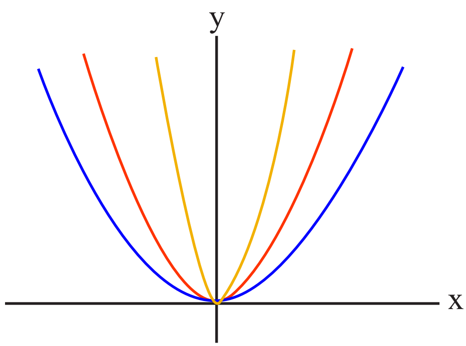
ß

$$\left|\begin{array}{l} 1=a*2^2+b*2+c \\ 3=a-b+c \\ 4=a*3^2+b*3+c \end{array}\right| \quad Þ \quad a=\frac{11}{12} \quad b=-\frac{19}{12} \quad c=\frac{1}{2}$$

ß

$$y(x)=\frac{11}{12}*x^2-\frac{19}{12}*x+\frac{1}{2}$$

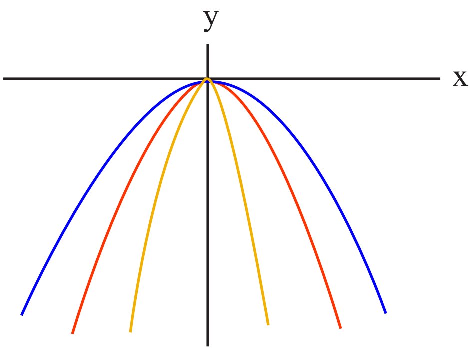
Formen von Parabeln:



a=1 Normalparabel

a=2 a > 1 dehenen, strecken ist
ist schmaler als Normalparabel

a=0.5 a < 1 pressen, stauchen ist
breiter als Normalparabel

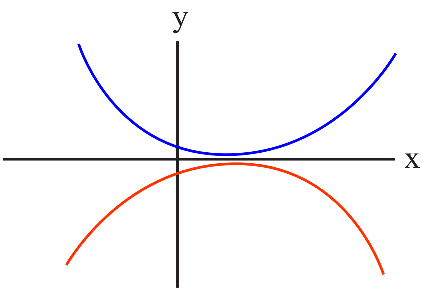


a=-1 Normalparabel

a=-2 a > 1 dehenen, strecken ist
ist schmaler als Normalparabel

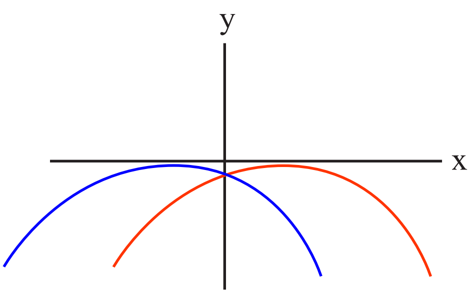
a=-0.5 a < 1 pressen, stauchen ist
breiter als Normalparabel

Spiegelung



Die Parabel $y(x)=-1/5*(x-2)^2-1$
wird über die x-Achse gespiegelt

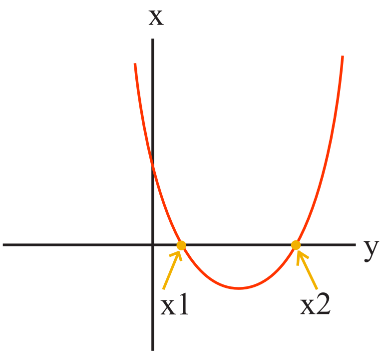
Formel : $y(x)=1/5*(x-2)^2+1$



Die Parabel $y(x)=-1/5*(x-2)^2-1$
wird über die y-Achse gespiegelt

Formel : $y(x)=-1/5*(x+2)^2-1$

Linearfaktorzerlegung oder Nullstellen:



Grundform :

$a*(x-x_1)*(x-x_2)$

$y(x)=3*x^2-9*x-30$

y(x) in ein Produkt zerlegen:

ß

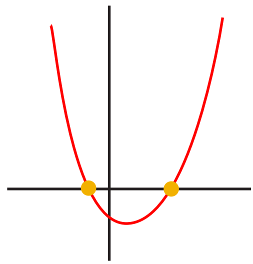
$y(x)=3*(x^2-3x-10)$

$y(x)=3*(x-5)*(x+2)$

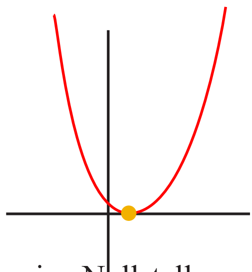
Nullstellen Þ $x_1=5$ $x_2=-2$

$0=3*x^2-9*x-30$ Þ $x_1=5$ x_2=-2

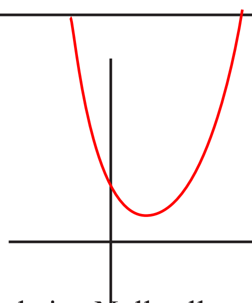
Achtung - wird +
Achtung + wird -



zwei Nullstellen

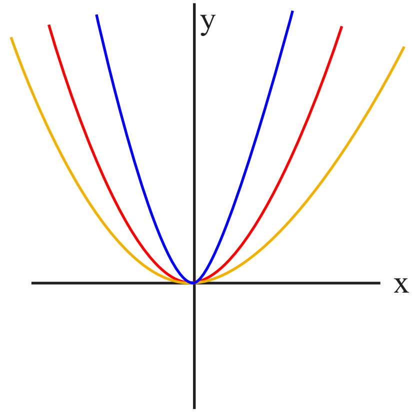


eine Nullstelle



keine Nullstelle

Potenzfunktion



Potenzfunktion:
$y(x) = a*x^n$

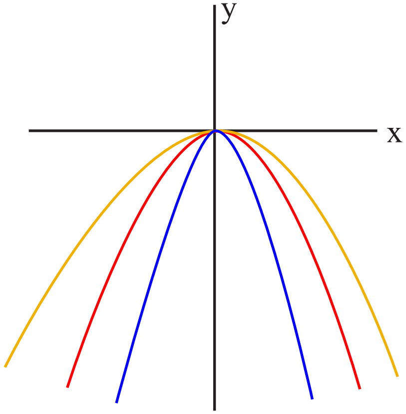
n ist gerade

a = 1
a > 1
1 >a <0

Parabel n-ter Ordnung

a bewirkt eine Stau-
chung
oder Streckung

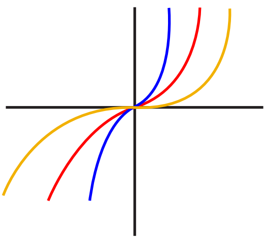
a negativ bewirkt eine
Spiegelung an der x



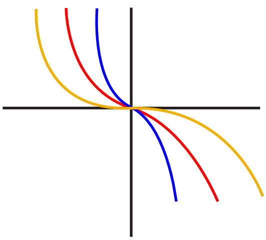
a = -1
a < -1
-1 <a >0

Potenzfunktion:
$y(x) = a*x^n$

n ist ungerade



a = 1
a > 1
1 >a <0

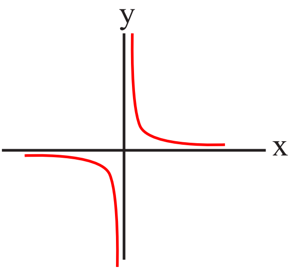


a = -1
a < -1
-1 <a >0

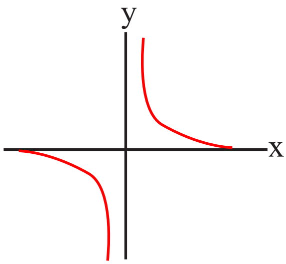
die Hyperbel:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x^n}}$$

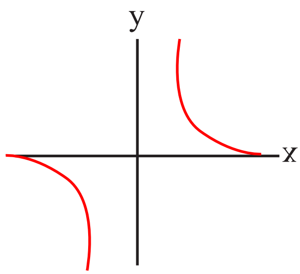
x^n ungerade



$$\boxed{x = \frac{1}{x}}$$

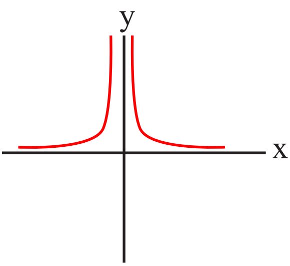


$$\boxed{x = \frac{1}{x^3}}$$

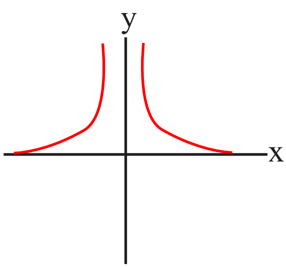


$$\boxed{x = \frac{1}{x^5}}$$

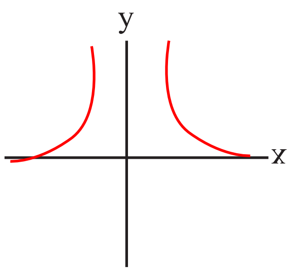
x^n gerade



$$\boxed{x = \frac{1}{x^2}}$$



$$\boxed{x = \frac{1}{x^4}}$$



$$\boxed{x = \frac{1}{x^6}}$$

Funktion oder Gleichung 3. Ordnung:
$y(x) = a*x^3 + b*x^2 + c*x + d$

Horizontaler Wurf:

$$y(x) = \tan(d) * x - \frac{5}{v^2 * \cos(d)^2} * x^2$$

v = Geschwindigkeit

x = Distanz

y = Höhe

d = Abschusswinkel

Wurf aus Höhe (Stein wird con Spitze Turm horizontal geworfen):

$$y(x) = -\frac{5}{v^2} * x^2 + h$$

v = Geschwindigkeit

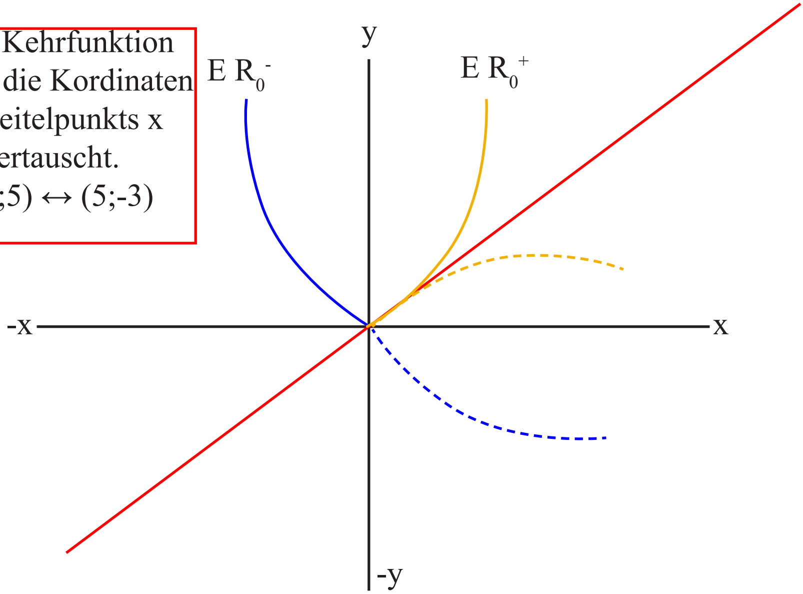
h = Höhe

y= bei Weite x , y=0
h= Höhe des Turms
x= Weite

$$s(t) = 5 * t^2$$

Die Umkehrfunktion oder Inverse Funktion:

Bei der Kehrfunktion werden die Kordinaten des Scheitelpunkts x und y vertauscht.
z.B. (-3;5) ↔ (5;-3)



Umkehrfunktionen werden immer über die Gerade der Winkelhalbierenden vom 1. und 3. Quadranten gespiegelt.

Umkehrfunktion:

$$y_1 = \sqrt{x}$$

$$y_1 = -\sqrt{x}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$$

Funktion $f(x)=x^2$

Kehrfunktion $x=y^2$

Diese Zuordnung ist nicht eindeutig:

Dies ergibt 2 einzelne Funktionen:

$f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ $\quad x \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}^+_0$

$f^{-1}(x)=-\sqrt{x}$ $\quad x \leq 0 \quad x \in \mathbb{R}^-_0$

$y_1 = \sqrt{x}$

$y_2 = -\sqrt{x}$

Wertetabelle:

x	-5	-2	0	1	2
f(x)	50	8	0	2	8

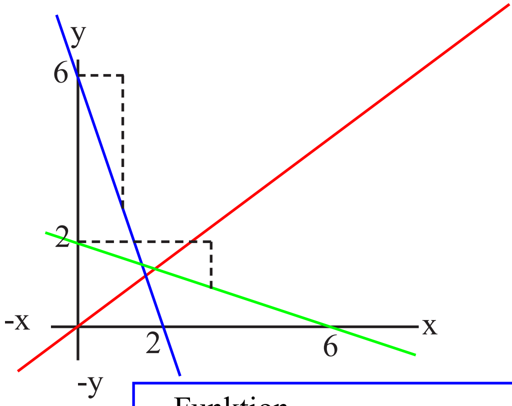
x und y Werte werden vertauscht:

x	50	8	0	2	8
f(x)	-5	-2	0	1	2

Die Umkehrfunktion oder Inverse Funktion:

Die Umkehrfunktion einer linearen Funktion:

Symmetrieachse
(1-3 Quadrant)



Bei der Kehrfunktion werden die Kordinaten y und y vertauscht.
z.B. (-3;5) ↔ (5;-3)

Funktion

f(x)=-3*x+6

Steigung $m = \frac{Dy}{Dx} = \frac{-3}{1}$

Umkehrfunktion (x und y werden vertauscht)   x=m*y+q

x=-3*y+6

Steigung $m = \frac{Dy}{Dx} = \frac{-1}{3}$

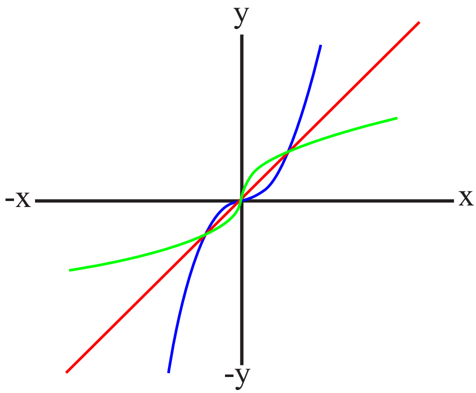
Auflösung nach y

$$y=\frac{x-6}{-3}$$

$$y = \frac{6-x}{3}$$

$$y = -\frac{1}{3} * x + 2$$

Die Umkehrfunktion oder Inverse Funktion:



Funktion :

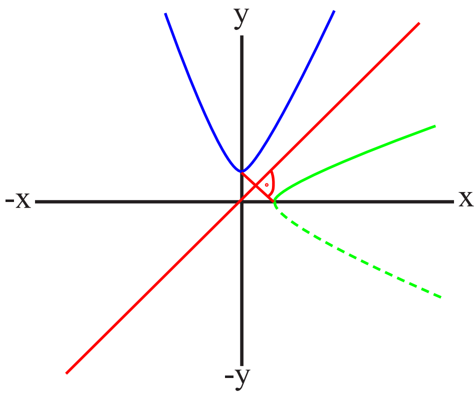
$y(x) = x^3$

Kehrfunktion :

$x = y^3$

$y(x) = \sqrt[3]{x}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$



Funktion :

$f(x) = x^2 + 1$

Kehrfunktion :

$x = y^2 + 1$

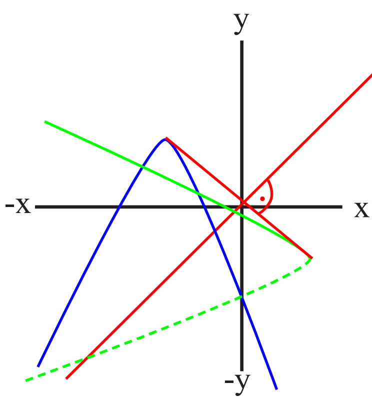
$y^2 = x - 1$

1.Funktion :

$y = \sqrt{x - 1}$

2.Funktion :

$y = -\sqrt{x - 1}$



Funktion :

$f(x) = -x^2 - 6 * x - 7.5$

Scheitelpunkt :

S (-3;1.5)

$y(x) = -(x + 3)^2 + 1.5$

$x = -(y + 3)^2 + 1.5$

$(y + 3)^2 = 1.5 - x$

$y = \pm\sqrt{1.5 - x} - 3$

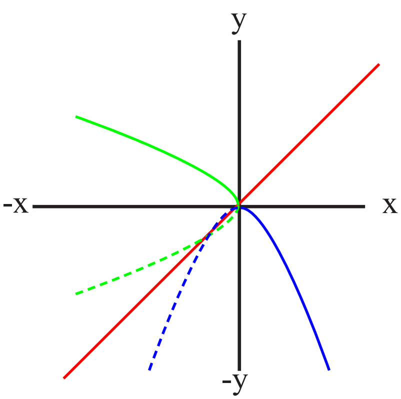
Umkehrfunktion1 :

$y = \sqrt{1.5 - x} - 3$

Umkehrfunktion2 :

$y = -\sqrt{1.5 - x} - 3$

Die Umkehrfunktion oder Inverse Funktion:



Funktion :

$f(x) = -x^2$ x ³ 0 x £ 0

Umkehrfunktion:

$x = -y^2$

1.Umkehrfunktion

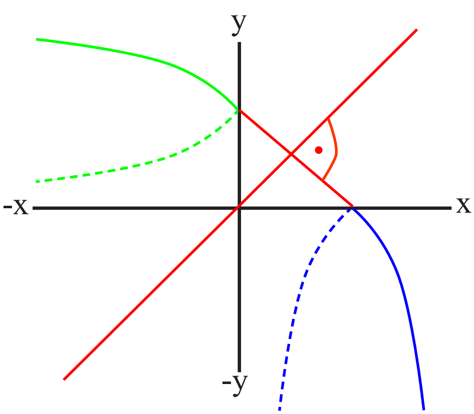
$y = \sqrt{-x}$

Achtung : $y = \sqrt{- - y}$

2.Umkehrfunktion

$y = -\sqrt{-x}$

Achtung : $y = -\sqrt{- - y}$



Funktion :

$f(x) = -(x-3)^2$ x ³ 0 x £ 0

Umkehrfunktion :

$x = -(y-3)^2$

$(y-3)^2 = -x$

$y - 3 = \pm\sqrt{-x}$

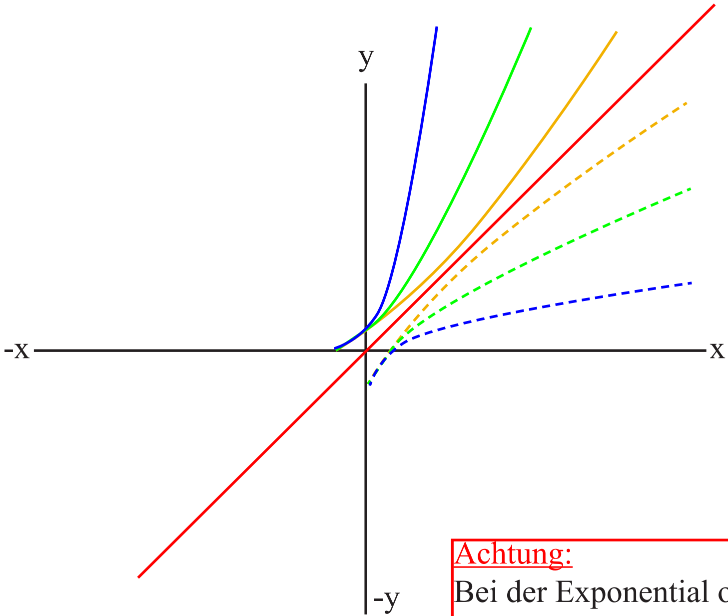
1.Umkehrfunktion :

$y = \sqrt{-x} + 3$

2.Umkehrfunktion:

$y = -\sqrt{-x} + 3$

Die Exponential- oder Logarythumsfunktion:



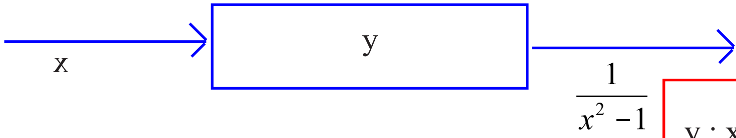
Achtung:
Bei der Exponential oder Logarythmusfunktion darf die Basis nie negativ sein.
Sonnst ist es keine Funktion mehr.

$f(x) = 10^x$ $y = 10^x$	$f(x)=2^x$ $y=2^x$	$f(x)=e^x$ $f(x)=e^x$

Umkehrfunktion

$x = 10^y$	$x=2^y$	$x=e^y$
$y = \log_{10} x$	$y = \log_2 x$	$y = \log_e x$
$y=\dfrac{\log(x)}{\log(10)}$	$y=\dfrac{\log(x)}{\log(2)}$	$y=\dfrac{\log(x)}{\log(e)}$

Allgemeines:



$$y : x \text{---->} \frac{1}{x^2-1}$$

Definitionsbereich D:

Definitionsmenge sind die Zahlen des Definitionsbereichs.
Für Welche Werte ist die Funktion definiert? Können verarbeitet werden.

D = R \ {-1, 1}
D = {x € R | x \ -1,1}
D = {x € R | x ≠ -1,1}

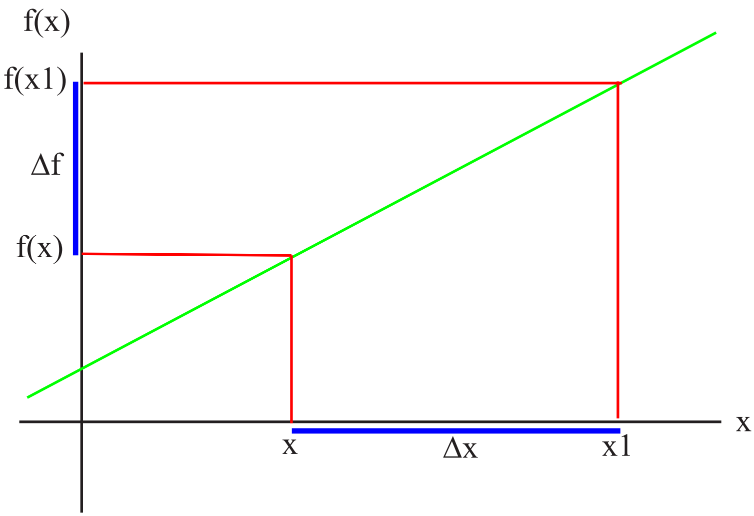
Wertebereich W:

Welche möglichen Zahlen erhalten wir als Lösung?
f(ß) = sin(ß)
W = [-1, 1]   D = R

Intervallschreibweise:

f(x) = √x
D = {x € R | x ≥ 0} ----Intervallschreibweise [0, ∞) oder [0, ∞ [

Differentialgleichung:



$$\boxed{a = \frac{f(t1) - f(t)}{t1 - t}}$$

$$f(t) = a*(t1 - t) + f(t1)$$

$$f(t) = f(t1) + a*t1 - a*t$$

Bsp:

$f(2) = 5,\ f(4) = 1$

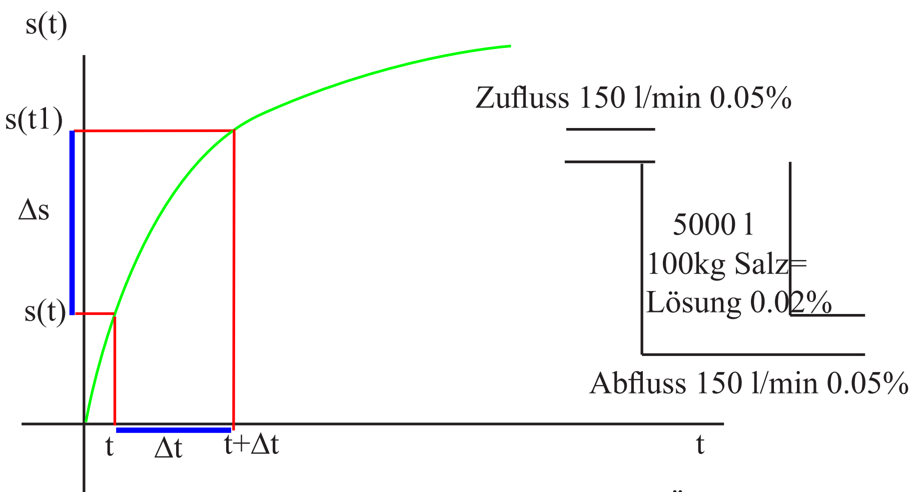
$$\boxed{f(x) = f(x1) + a*(x - x1)} \qquad a = \frac{f(x1) - f(x)}{x1 - x}$$

$$f(x) = 5 + a*(x - 2) \qquad a = \frac{5 - 1}{2 - 4} \qquad a = -2$$

$$f(x) = 5 + -2*(x - 2)$$

$$f(x) = -2*x + 9$$

Differentialgleichungen:



Definition: Die Funktion, die wir suchen und ihre momentane Änderungsrate kommen als Unbekannte in der Funktion vor. Nicht Zahl ist gesucht, sondern ganze Funktion.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

$\Delta s = f(t+\Delta t) - f(t)$ Salzkonzentration = $c(t)=\dfrac{s(t)}{5000}$

t und Δt eng beieinander

$$s(t+\Delta t) \approx s(t) + \Delta V*0.005 - \Delta V*c(t)$$

$$s(t+\Delta t) \approx s(t) + \Delta t*150*0.005 - \Delta t*150*\frac{s(t)}{5000} \qquad /-s(t) :\Delta t$$

$$\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} \approx 150*0.005 - 150*\frac{s(t)}{5000}$$

$$\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} \approx 7.5 - 150*\frac{s(t)}{5000}$$

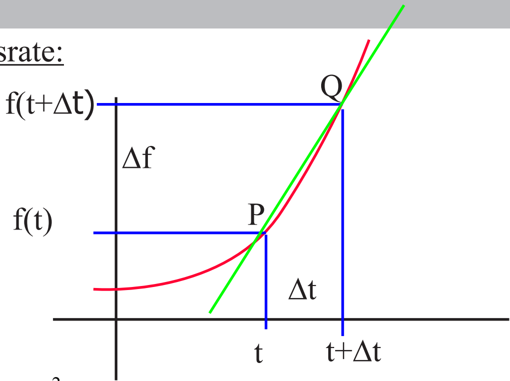
Grenzfall / Grenzwert (momentane Änderungsrate)

$\Delta t \longrightarrow 0$

$$s'(t)=7.5 - 150*\frac{s(t)}{5000}$$

TR : deSolve($y'=7.5 - \left(150*\dfrac{y}{5000}\right)$ and y(0)=0.2,x,y)

Änderungsrate:



Beispiel $f(t)=t^2+3*t$

mittlere oder durchschnittliche Änderungsrate (Differenzquotient):

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

im Zeitintervall [t,t+” t]

Geometrisch Steigung von P zu Q

momentane Änderungsrate, Grenzfall:

Grenzwert für Δt gegen Null! Grenzfall: Sekante wird zur Tangente. (Nenner wird 0)

$$\frac{1}{x-3} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Grenzfall kann natürlich (nicht bestimmter F-Wert), oder selber über Δt bestimmt sein.

Geometrisch Gerade wird zur Tangente bei Δt fast Null.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \rightarrow f`(t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

TR :

$d(t^2+3*t, x)$ out "Momentane Änderungsrate" 2*x+3 bei $\lim_{\Delta x \to 0}$ Resultat 3

Funktion der Änderungsrate der Funktion.

TR:

limit $\left(\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}, x, 0\right)$ bestimmt den Y-Wert an dem angegebenen X-Wert,

Out: y-Wert des Grenzwertes.

Grenzwert:

Beispiel:

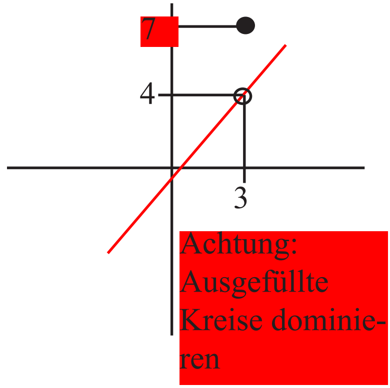
$$f(x) = \frac{2 * x^2 - 7 * x + 3}{x - 3}$$

$$f(x) = \frac{(x-3) * (2 * x - 1)}{x - 3} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Schreibweise:

$$x_0 = 3 \quad \lim_{x \to 3} \text{f(x)} = \frac{(x-3) * (2 * x - 1)}{x - 3}$$

$$\text{f (3)} = 7$$



$$\text{f(x)} = \begin{cases} \frac{(x-3) * (2 * x - 1)}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$$

rechtsseitiger Grenzwert:

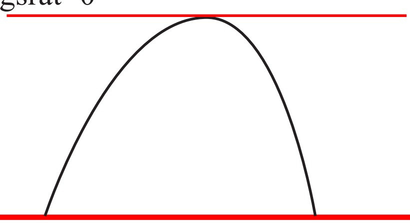
$\lim\limits_{x \to 3^+}$ Grenzwert von der positiven X-Achse her.

linksseitiger Grenzwert:

$\lim\limits_{x \to 3^-}$ Grenzwert von der negativen X-Achse her.

f(x) ist stetig, wenn sie keine Sprungstellen bei möglcihen Grenzwerten x_0 hat.
Funktion ist mit einem Strich gezeichnet.

Extemum
Änderungsrat=0



Rechnen mit Matrixen im TR:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 8 \\ 2 & 16 \\ 3 & 32 \\ 4 & 64 \\ 5 & 132 \\ 6 & 264 \\ 7 & 528 \\ 8 & 1048 \end{pmatrix}$$

Δ eines Wertes immer ein Wert minus den vorherigen Wert.

Ist die Anderungsrate bekannt, so kann mit:
deSolve y'= Term and y(0)=Wert, x, y
oder
Integrale Term, x   ACHTUNG: +C

Bei Listen immer zuerst
x Liste, dann y Liste

subMat (Matrix-name, erste_Zeile, Spalte, letzte_Zeile, Spalte)

Erstellen einer Matrix:	[3,2;4,5;.......] ->Sto Matname
	[[3,2][4,5].....]->Sto Matname
Änderungsrate:	subMathΔ1 ./ subMathΔ2
Rechnen mit Listen o. Matrixen:	+ - .* ./
z.B:	Listen_o._Matrixname subMath() - subMath()
Grösse einer Matrix ermitteln:	rowDim(Name_der_Matrix)
Liste aus matrix erstellen:	mat>list(subMath())->Sto Listenname
	mat>list(Math_Name)
Liste erzeugen:	{2,4,7,9,10.......}->Sto Listenname
Regressionskurve:	Linreg ListeX, ListeY Gerade
	Quadreg ListeX, ListeY Parabel
a, b der Funktion:	ShowStat
Minimum Matrix oder Liste:	min (Name_Liste_oder_Matrix)
Maximum Matrix oder Liste:	max (Name_Liste_oder_Matrix)
bestmögliche Koeffizienten auf der Parabel	ntegriernQuadreg
a*t2 + b*t +c a, b, c	: regeq(x)
Plotten von Punktwolken:	Apps / Data-Matrix Editor / new
	Liste C1 anwählen
	Liste C2 anwählen
	F2 plot setup
	F1 define

Integrieren: F3
∫(integrate
∫(term, x)
∫(term, x, Anfangswert, Endwert)
Achtung: TR liefert nur eine Stammfunktion mit c=0

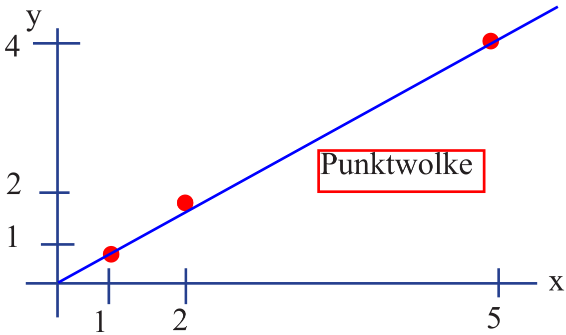
Quadreg(Wie Linreg aber bei Qudratischen Funktionen): Quadreg Liste1, Liste2

Limit, um den Grezwert der nichtdefinierten Stelle zu ermiteln:
limit(Term, x, Stelle, 1 oder -1) /-1 für linkseitig 1 für rechtsseitig
limit(Term,n,n=∞)
Σ(sum: Konstante*Σ(Term, i, Startwert, Endwert)

Integrieren: ∫(Term,x,Anfangswert,Endwert)
Änderungsrate: δ(f(x),x,wievielte Ableitung)
Differenzgleichung: deSolve(y‘=f(x,y) and y(0)=y_0, x, y)
Linearisierung durch Parabel: taylor (f(x), x, 2, x_0) 2=Grad des Polynoms

Regressionskurve:

Drei Punkt (1/1), (2/2), (4/5)
Gerade im TR: Linreg {1,5,4}, {1,2,4 }



Die Regressionsgerade ist die Gerade durch die Punktewolke, bei der die Abstände der Punkte zur wirklichen Gerade möglichst klein ist. Um Vorzeichenfehler zu vermeiden, nimmt man den tatsächlichen Funktionswert-den Punktwert im Quadrat.
jede Regressionskurve geht durch den Schwerpunkt.

SSE (sum squared error):

$$\text{Schwerpunkt } \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3.....}{\text{Anzahl x}} = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\text{Schwerpunkt } \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3.....}{\text{Anzahl y}} = \frac{1+2+5}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\text{Schwerpunkt } \left(\bar{x}, \bar{y}\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

$$\text{Steigung } \bar{y} = m*\bar{x} + b \quad \Rightarrow \quad b = \bar{y} - m*\bar{x}$$

$$b = \frac{8}{3} - m*\frac{7}{3}$$

$$\text{SSE (sum sqared error) } \sum_{k=1}^{3} (f(x_k)-y_k)^2 = (f(1)-1)^2 + (f(2)-2)^2 + (f(4)-5)^2$$

tatsächlicher Funktionswert- Punktwert

$f(\bar{y}) = m*\bar{x} + b$ Schwerpunkt

$((m*1+b) - 1)^2 + ((m*2+b) - 2)^2 + ((m*5+b) - 5)^2$

$((m*1+\left(\frac{8}{3}-m*\frac{7}{3}\right)) - 1)^2 + ((m*2+\left(\frac{8}{3}-m*\frac{7}{3}\right)) - 2)^2 + ((m*5+\left(\frac{8}{3}-m*\frac{7}{3}\right)) - 5)^2$

$9*m^2 - \frac{52*m}{3} + \frac{26}{3}$

für welches m ist SSE(m) minimal??? SSE'(m)=0 $SSE = \sum_{i=1}^{n} \left(f(X_i) - y_i\right)^2$

TR: solve $\left(\delta\left(9*m^2 - \frac{52*m}{3} + \frac{26}{3}, m\right) = 0, m\right)$

out m, mit m b berechnen

Euler Verfahren (Differential 1. Ordnung):

gegeben:

$f'(x) = \cos(x)$, f(0)=2

gesucht:

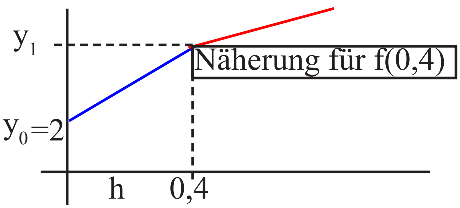
f(x)=????

für x=0 haben wir die Information f(0)=2 und f'(0)=1

für x=0.4 holen wir die Information f'(0,4)=0,29

f(0.4)=??, D=h*f'(0)=0.4, f(0.4) » 2+Dy = 2,4

$$f'(0) = \frac{y_1 - y_0}{h}$$
$$y_1 = y_0 + h*f'(0)$$



$x_0 = 0$	$y_0 = 2$
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + h*f'(x_0)$
$x_2 = x_1 + h$	$y_2 = y_1 + h+f'(x_1)$
....	......

$x_n = x_{n-1} + h \qquad y_n = y_{n-1} + h*f'(x_{n-1})$

je kleiner h, desto genauer die Kurve!!!

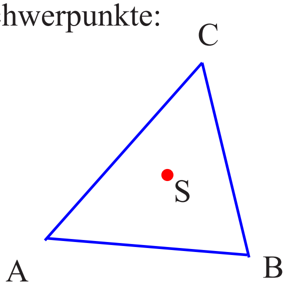
das Summenzeichen Σ:

$$\sum_{n=3}^{7} \frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

Die Operationen werden der arythmetik zusammengezählt.

$$\sum_{\text{Schrittweite}}^{\text{Endweite}} \text{Operation}$$

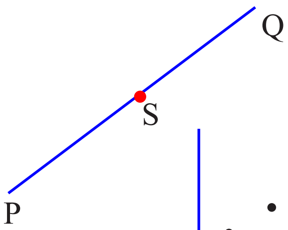
Schwerpunkte:



verknüpfte Integrationsregeln:

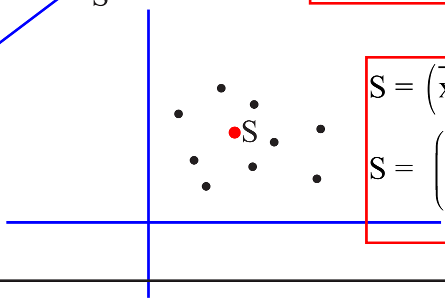
$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b (f(x)dx \pm \int_a^b g(x))dx$$

$$\int_a^b (c * f(x))dx = c * \int_a^b f(x)dx$$



grösster Re Wert der Inversion von g ist Q, weil P der kleinste Abstand zu 0

$\frac{1}{P}$ wenn P am kleinsten, nimmt Q den grössten



$$S = \left(\overline{x} \mid \overline{y}\right)$$

$$S = \left(\frac{x1 + \ldots + xn}{n} \mid \frac{y1 + \ldots + yn}{n}\right)$$

Differenzieren Integrieren:

gegeben y(x) = x*sin(α)

gesucht Y(x) so dass Y'(x)=x*sin(x)   man kennt nur die Änderungsrate von Y(x)

Lösung: Y(x)= $\int$x*sin(x)*dx = sin(x)-x*cos(x) + C (Integrationskonstante)

Eine Funktion mit F‘ =f heisst Stammfunktion
Menge aller Stammfunktionen von f heissen unbestimmtes Integral
f heisst Integand.
/ steht für unbestimmtes Integral

	differenzieren		differenzieren		$\delta(.....,x)$
	$\leftarrow\leftarrow\leftarrow$		$\leftarrow\leftarrow\leftarrow$		
$f'(x)$	$\rightarrow\rightarrow\rightarrow$	$f(x)$	$\rightarrow\rightarrow\rightarrow$	F(x) Stammfunktion	
	integrieren		integrieren		$\int(.....,x)$

Differenzieren:

gegeben: $f(x) = \sin(3*x)$

gesucht: die Änderungsrate

TR: $\delta(\sin(3*x), x)$

Out: $f'(x) = 3*\cos(x)$

gegeben: $f'(x) = -2*x*y^2 \qquad y(0) = 1$

$f(x,y) = \; -2*x*y^2$

TR: $deSolve(y' = -2*x*y^2 \; and \; y(0) = 1, x, y)$

Out: $y(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

Kontrolle: $\delta\left(\dfrac{1}{x^2+1}, x\right) \qquad Out: -2*x*\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^2$

Integrieren:

gegeben: $f(x) = \sin(3*x)$ f(0)=C

gesucht: alle Funktionen F(x),die die Eigenschaft haben, dass G'(x)=$f(x)$

TR: $\int(\sin(3*x), x)$

Out: $\dfrac{\text{-cos(3*x)}}{3}$ Stammfunktion von f (TR liefert nur Stammfunktion)

$\dfrac{\text{-cos(3*x)}}{3}$ +C (Integralkonstante)

Menge aller Stammfunktionen heisst unbestimmtes Integal

Rechenregeln für die Ableitungen (differenzeren):

$$f(x)=x^r \quad\rightarrow\quad f'(x)=r*x^{r-1}$$
$$f(x)=\sin(x) \quad\rightarrow\quad f'(x)=\cos(x)$$
$$f(x)=\cos(x) \quad\rightarrow\quad f'(x)=-\sin(x)$$
$$f(x)=e^x \quad\rightarrow\quad f'(x)=e^x$$
$$f(x)=\ln x \quad\rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{x}$$

Summenregel:

$$f(x)=g(x)+h(x) \quad\rightarrow\quad f'(x)=g'(x)+h'(x)$$

Produktregel:

$$f(x)=c*g(x) \quad\rightarrow\quad f'(x)=c*g'(x)$$
$$f(x)=g(x)*h(x) \quad\rightarrow\quad f'(x)=g'(x)*h(x)+g(x)*h'(x)$$

Quotientenregel:

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \quad\rightarrow f'(x)=\frac{g'(x)*h(x)-g(x)*h'(x)}{\left(h(x)\right)^2}$$

Kettenregel:

$$\mathrm{f(x)=g}\left(\mathrm{h(x)}\right) \quad\rightarrow f'(x)=\mathrm{g'}\left(\mathrm{h(x)}\right)*\mathrm{h'(x)}$$

Äussere abgleietet von der Inneren, mal die Innere abgeleitet

Bei mehreren Ineinader:

$$\mathrm{a(b(c(d(x))))} \quad\rightarrow a'(b(c(d(x))))*b'(c(d(x)))*c'((d(x))*d'$$

Achtung Konstanten:

4+x wird differenziert zu 1 $(1*x^0)=1*1$

y+x=4 y‘+x‘=0

Eine Funktionsreihe der Gestalt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{a_k*(x-x_0)^k}$$ **heisst Potenzreihe.**

$\mathbf{a_0, a_1, ...}$ **heissen Koeffizienten der Potenzreihe**

$\mathbf{x_0}$ **heisst Entwicklungspunkt**

Achtung :

$\frac{1}{x}$ wird differenziert zu $-1*\frac{1}{x^2}$

$f(x) = 2^x \quad f'(x) = \ln 2 * e^{x*\ln 2}$

$7^{11} = e^{11*\ln 7}$

$3^5 = e^{5*\ln 3}$

$f(x) = e^{x*\ln 2} \quad = f'(x) = \ln 2 * e^{x*\ln 2} \quad = \quad f'(x) = \ln 2 + 2^2$

$f(x) = 7^x = f'(x) = \ln 7 * 7^x$

$f(x) = e^x = f'(x) = \ln e * e^x$

$y * e^{3*x-5*y-2}$

$f'(x) = 3 * y * e^{3*x-5*y-2}$

$f'(y) \quad y \quad = \quad 1$

$e^{3*x-5*y-2} \quad = \quad -5 * e^{3*x-5*y-2}$

$\Pr odukteregel: -5 * y * e^{3*x-5*y-2} + e^{3*x-5*y-2}$

Achtung:

$b*e^{a*x} = a*b*e^{a*x}$ /bei e hoch kann der Exponent nach vorne genommen werden, bleibt aber im hoch.

Bei Wurzel $\sqrt{x^2-3}$ /Zwei Funktionen

Konstanten = Null

implizit differenzieren:

$x^2 + y^2 = 1$ /()' wobei y= $(y(x))^2$ 1.Funktion y(x)

Produkteregel 2.Funktion x^2

2*x+2*y'(x)*y(x)=0

$y'(x) = \frac{-2*x}{2*y} = \frac{-x}{y}$

Rechenregeln für die Integration:

Konstanten $\neq$ Null

Bsp:

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^{k-1}$ $\quad a=1, q=-\frac{1}{8}$

$\frac{8}{3}+\frac{16}{9}+\frac{32}{27}+\ldots$ $\quad a=\frac{8}{3}, q=\frac{\frac{16}{9}}{\frac{8}{3}}$

$0,2323232323$ $\quad a=\frac{23}{100}, q=\frac{1}{100}$

Funktionsreihen:

für den Grenzwert, falls er existiert f(x)

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(\cos(x))^{k-1}$$

$a=1$

$q=x$

ε_{15} an der Stelle $x=3$

$$\varepsilon_{15}=\left|\frac{a}{1-q}\right| * |q|^{n}=\left|\frac{1}{1-\cos(3)}\right| * |\cos(3)|^{15}$$

Hauptsatz der Differenzial und Integralrechnung:

Funktionsreihen:

für den Grenzwert, falls er existiert f(x)

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(\cos(x))^{k-1}$$

$a=1$

$q=x$

ε_{15} an der Stelle $x=3$

das Summenzeichen Σ:

$$\sum_{n=3}^{7}\frac{1}{n} = \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$$

Die Operationen werden der arythmetik zusammengezählt.

$$\sum_{\text{Schrittweite}}^{\text{Endweite}} \text{Operation}$$

TR: Konstante*Σ(Term, i, Startwert, Endwert)
Σ(1/k!), k, 0, ∞) →Zahl durch Null wird berücksichtigt
Limit(Term, n, ∞) oder Limit(Term, n)|n=Schrittweite
Achtung:
Σ(Term, i, Startwert, Endwert)|n=Schrittweite
Bei Wurzelterm muss Schrittweite definiert werden, ∞ geht nicht.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}....+\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+.... = e$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x*\left(\sum_{i=0}^{n-1}g(x_i)\right)$$ = bestimmtes Integral von g(x) in den Grenzen a und b:

$$\int_a^b g(x)dx \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\pi*\sum_{k=0}^{n-1}f(x)^2*\Delta x \qquad \boxed{\Delta x \to 0} \qquad \pi\int_{a=\text{Anfang}}^{b=\text{Schluss}} f(x)^2*dx$$

Rotationskörper ,Matelflächen, Funktionsflächen ,Kurvenlängen usw.:

Kegelvolumen V_n:

$$\pi * \Delta x * \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)^2 \qquad \Delta x = \frac{h\text{(Betrag auf der X-Achse)}}{n}$$

Euler y_n:

$$y_0 + \Delta x * \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

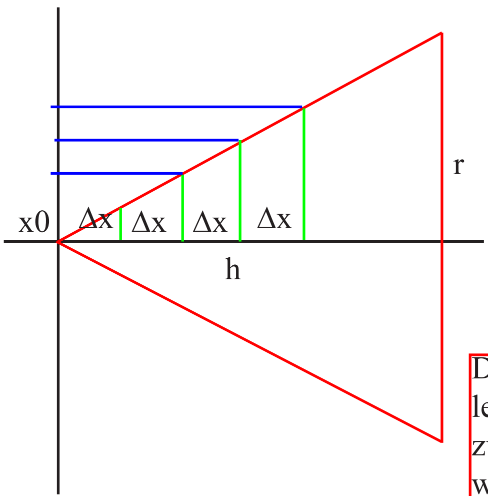
Kurvenlänge s_n:

$$\Delta x * \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(x_i))^2}$$

theoretischer Mittelwert $\bar{t}$:

$$\approx \Delta x * \sum_{i=1}^{n} f(t_i) * t_i$$

Beispiel Rotationskörper Kegelvolumen:



$$Volumen = \frac{1}{3} * G * h = \frac{1}{3} * r^2 * \pi * h$$

$$\Delta x = \frac{h}{n}$$

$$\pi * \Delta x * \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)^2 \quad , \quad \Delta x = \frac{h}{n}$$

$$\pi * \frac{h}{n} * \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)^2$$

Der Kegel wird in zylindrische Scheiben zerlegt. Die Summe der Einzelvolumen wird zum Kegelvolumen, wenn wir die Schrittweite (oder Δx) gegen unendlich gehen lassen.

bestimmte Integralfunktionen:

Fläche zwischen Graphen und x-Achse A, f(x) $\geq$ 0:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Differentia lg leichung :

$$y(x) = \int_{x0}^{x} f(u)du$$

Volumen bei Rotationskörpern:

$$V = \pi * \int_a^b f^2(x)dx$$

Länge s des Graphen:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

empirische Mittelwert $\bar{x}$:

$$x = \int_{a0}^{ar} x * f(x)dx$$

Mantelfläche M:

$$M = 2 * \pi * \int_a^b f(x) * \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

bestimmtes und unbestimmtes Integral:

Achtung:
Integralrechnung nicht nur für Flächen, auch für Körper usw.

Hauptsatz:

$$\int_{Anfangspunkt}^{Endpunkt} Funktion\ \mathrm{dx}$$ bestimmtes Integral ohne Konstante C

unbestimmtes Integral mit Konstante C

ist F'=f und f stetig, dann

$$\int^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) \quad = \quad F'(x) = f(x)$$

verknüpfte Integrationsregeln:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b (f(x)dx \pm \int_a^b g(x))dx$$

$$\int_a^b (c * f(x))dx = c * \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Flächenbereechnung:
Achtung Absolutwerte für Flächen unter der x Achse.

grösster Re Wert der Inversion von g ist Q, weil P der kleinste Abstand zu 0 $\frac{1}{P}$ wenn P am kleinsten, nimmt Q den grössten Realen Wert an.

Werkzeuge der Analysis:

Bestimmtes Integral (ohne Integrationskonstante C):

Formulierung: Bestimmtes Integral von y(x)

Mathematische Schreibweise: $\int_{Anfang}^{Ende} y(x)dx$

TR: $\int$(y(x),x,Anfangswert,Endwert)

Anwendungen: Flächeninhalt, Volumen, Bogenlänge, Mantelfläche, Mittelwerte einer Dichtefunktion, Abstand von zwei Funktionen

Mittlere Änderungsrate:

Formulierung:	Mittler Änderungsrate einer Funktion y(x) im Intervall [x,x+Δx]
Mathematische Schreibweise:	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
TR:	–
Anwendungen:	Durchschnittsgeschwindigkeit, Durchschnittsbeschleunigung, Durchschnittskosten,.........

Momentane Änderungsrate:

Formulierung:	Momentane Änderungsrate einer Funktion y(x) an *derStellex*
Mathematische Schreibweise:	$y'(x)$
TR:	δ(y(x),x)
Anwendungen:	Tangentensteigung, Momentangeschwindigkeit, Momentanbeschleunigung, Regression

Unbestimmtes Integral, Stammfunktion (mit Integrationskonstante C):

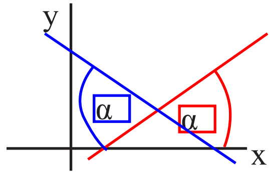
Formulierung:	Unbestimmtes Integral von y(x)
Mathematische Schreibweise:	$\int y(x)dx + C$
TR:	∫(y(x),x)
Anwendungen:	bestimmte Integrale, Momentangeschwindigkeiten Momentanbeschleunigung

Differntialgleichung:

Formulierung:	Differentialgleichung 1. Ordnung mit Anfangs-bedingung
Mathematische Schreibweise:	$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x) = ?$
TR:	$deSolve(y' = f(x,y) \; and \; y(0) = y_0, x, y)$
Anwendungen:	Beliebig viele Problemstellungen in der Mathematik, Physik, Biologie, Wirtschaftswissenschaften,.......

allgemein wichtiges:

Änderungsrate $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist immer Tangens



$$\boxed{\tan\delta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 * m_1} \quad bei\ 90° = m_1 * m_2 = -1}$$

$\int_a^b dx$ v.Hand integrieren (Wert von b) -(Wert von a)

$\int_a^b dx$ geht nur in der Form von $\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i$ $\qquad \Delta x = \frac{b-a}{n}$

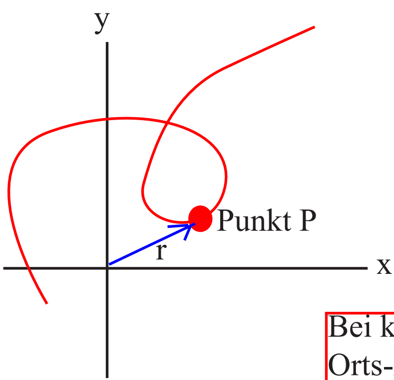
TR eingabe:

$\frac{1}{\sqrt{3}} * x \quad \rightarrow$ STO $\qquad$ f(x)

Konstanten*dx*$\sum(f(i*dx)^2, i, 0, n-1)$

limit$(Term, n, n = \infty)$

Ortsvektor:



Bei komplizierten Funktionen ist die Funktion in eine Orts-Zeit Funktion umzuwandeln, bei der ein Punkt P in zeitlicher Abhängigkeit sich auf der Kurve bewegt.
Mathematisch: Parameterdarstellung einer Kurve
t:Parameter
Physikalisch: Ort-Zeit Funktion eines Massepunktes
t:Zeit

Grundform der geometrichen Reihe:

$a = 30$

$q = 0,7$

$\sum_{k=1}^{\infty} 30 * 0,7^{k-1}$

$a = 2 \quad , \text{Reihe} = 2 - \frac{3}{2} \quad q = ?$

$2 * q = -\frac{3}{2}$

TR:
Mode / Graph / Parametric
Graph / xt1=? xt2=? ......

hyperbolische Funktionen oder Hyperbelfunktionen:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x * \cosh y + \cosh x * \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x * \cosh y + \sinh x * \sinh y$$

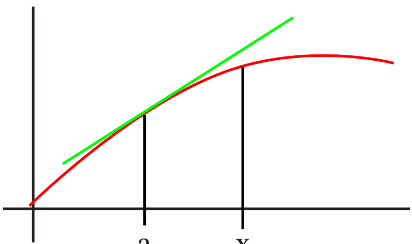
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

lineare Approximation:



$\boxed{l(x)=f(a)+f'(a)(x-a)}$

Linearisierung von f an der Stelle a ----- $\boxed{l(x)=f(a)+f'(a)(x-a)}$

Für eine Parabel als Linearfunktion:
$l(x) = a*x^2 + b*x + c$
$l(x_0) = f(x_0)$
$l'(x_0) = f'(x_0)$
$l''(x_0) = f''(x_0)$

TR:
taylor (f(x), x, 2, x_0)   2=Grad des Polynoms

Taylor-Reihen:

$$T(x) = a_0 + a_1 * (x - x_0) + a_2 * (x - x_0)^2 + a_3 * (x - x_0)^3 + ... + a_n * (x - x_0)^n$$

$$f(x_0) = T(x_0)$$

$$f'(x_0) = T'(x_0)$$

$$f''(x_0) = T''(x_0)$$

$$f^n(x_0) = T^n(x_0)$$

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = f'(x_0)$$

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

$$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

$$a_4 = \frac{f''''(x_0)}{4!}$$

$$a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}$$

$$n! \quad = \quad \text{Fakultät}$$

$$\text{TR:} \quad !$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k * (x_0)}{k!} * (x - x_0)^k$$

$\mathbb{R} \to M \qquad M \to \mathbb{R}$

$\text{Zahl} = \delta * m * B^e$

$L = \text{Anzahl Ziffern}$

$\delta = \text{Vorzeichen}$

$B = \text{Basis}$

$e = \text{Exponent}$

Achtung:
Bei Taylorreihe zu Potenzreihe -> fakultäten belassen

Graphen und ihr Verlauf:

$f'(x)>0$ für alle x Werte des Intervalls :
streng monoton wachsend im Intervall
$f'(x)<0$ für alle x Werte des Intervalls :
stren monoton fallend im Intervall
$f'(x)=0$ Extremalstelle Lokales Minimum oder Maximum.

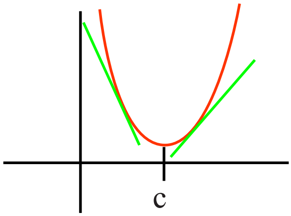
Vorzeichenwechsel eines Faktors ist entscheidend:

Bsp. $f'(x)=12*x^3-12*x^2-24*x$

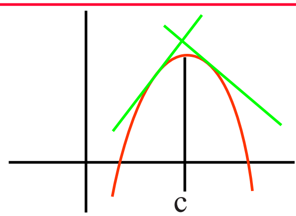
$f'(x)=12*x*(x-2)*(x+1)$

kritische Stellen:

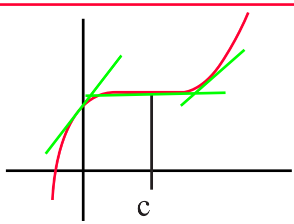
$$\left.\begin{array}{l}-1\\0\\2\end{array}\right\}\quad f'(x)=0$$



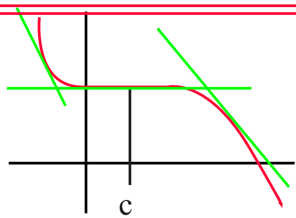
Linkskurve:
f' von - zu + (0 an der Stelle c)
links von c monoton fallend
rechts von c monoton steigend
lokales Minimum bei c.



Rechtskurve:
f' von + zu - (0 an der Stelle c)
links von c monoton steigend
rechts von c monoton fallend
lokales Maximum bei c.

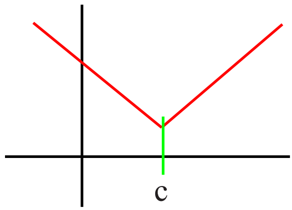


Sattel:
beidseitig von c monoton steigend

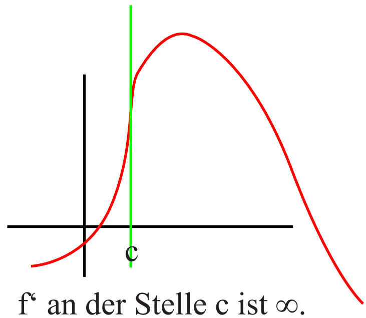


Sattel:
beidseitig von c monoton fallend

kein definierte Änderungsrate:



f‘ an der Stelle c nicht definiert.

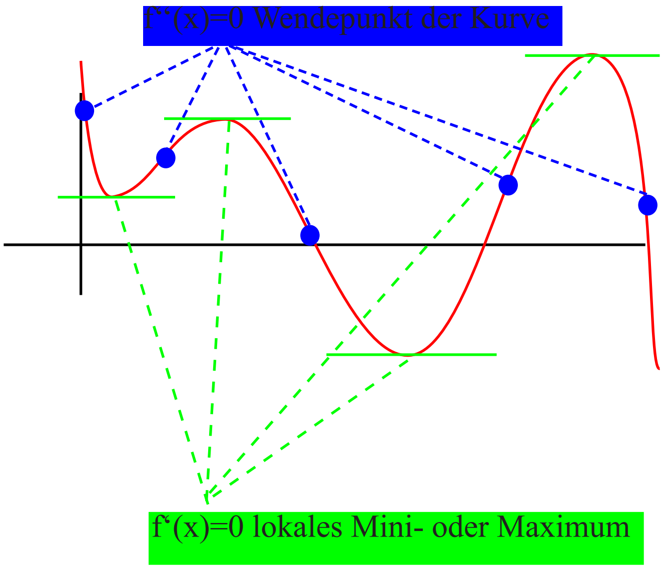


f‘ an der Stelle c ist ∞.

Wendepunkte:

f‘‘(x)<0   alle x vom Intervall sind rechtsgekrümmt
f‘‘(x)>0   alle x vom Intervall sind linksgekrümmt
f‘‘(x)=0   Wendepunkt

f‘(c)=0 und f‘‘(x)<0   lokales Maximum
f‘(c)=0 und f‘‘(x)>0   lokales Minimum



Implizit Differenzieren:

Bei x und y im Term -------> implizit differenzieren!!!

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)} * (x_0)}{k!} * (x - x_0)^k \qquad a_k$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} * x^k \qquad \text{für jedes } x \in \Re$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2*k)!} * x^{2*k} \qquad \text{für jedes } x \in \Re$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k * x^{k+1}}{k+1} \qquad \text{für } |x| < 1$$

Berührungspunkte Gerade und Funktion:

D<0 = kein Berührungspunkt, keine Extremalstelle

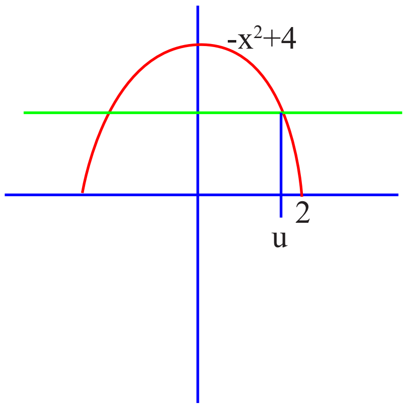
D=0 = ein Berührungspunkt , eine Extremalstelle

D>0 = 2 Schnittpunkte

Achtung:
Ableitung * Ableitung =tang

$-10*(-2-x)^2 = -10*(x+2)^2$
$-10*(-2-x)^3 = 10*(x+2)^3$

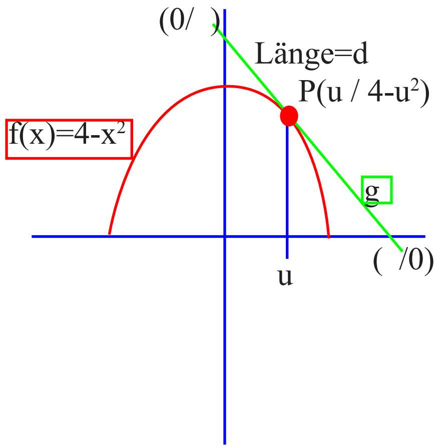
Bei Integral mit ABS() rechnen.



Tangente prallel zur z-Achse und soll die Fläche in zwei gleiche Teile schneiden:

$$u*(-u^2+4)+\int_u^2 -x^2+4 = \frac{1}{2}*\int_0^2 -x^2+4$$

$$y=-u^2+4$$



Tangente g soll Parabel berühren und der x-y Abschnitt soll minimal sein.

$$g:\quad y=f(u)+f'(u)(x-u)$$

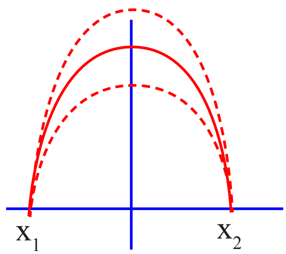
$$y=4-x^2-2*u(x-u)$$

Schittpunkt der Achsen:

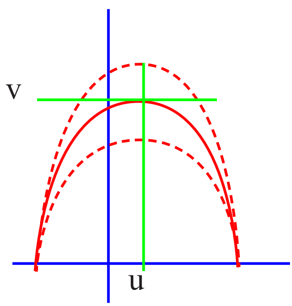
y-Achse : x=0 $\quad y=4+u^2$

x-Achse : y=0 $\quad x=\frac{4+u^2}{2*u}$

$$d(u)=\sqrt{\left(\frac{4+u^2}{2*u}\right)^2+\left(4+u^2\right)^2}$$

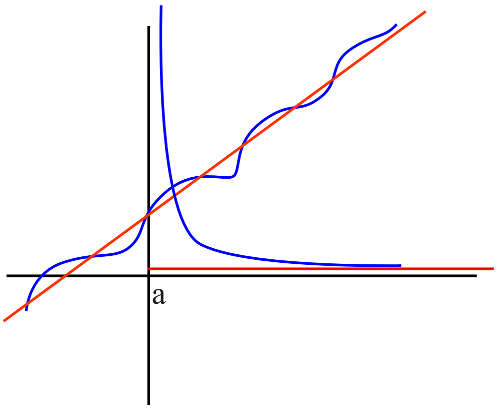


$P(x)=a*(x-x_1)*(x+2)$



$P(x)=a*(x-u)^2+v$

Asymtoten:



Eine Asymtote ist eine Geard, der sich der Grap h einer Funktion F(x) unbegrenzt nähert bei immer grösser werdendem x an eine Zahl, die nicht zum Definitionsbereich von f gehört.

$$Asymtote(x) = m * x + b$$

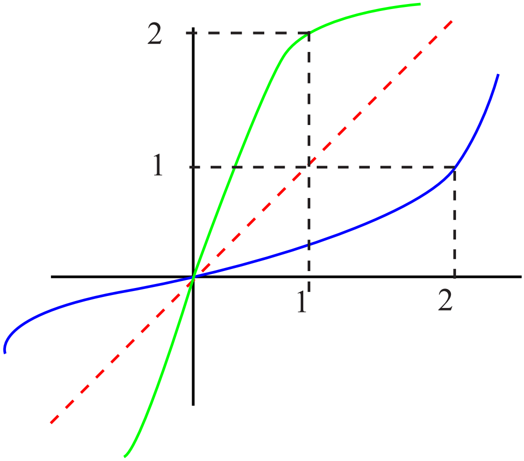
$$\lim_{x \to \infty} \quad f(x) - (m * x + b) = 0$$

$$manchmal: \quad m = \lim_{x \to \infty} \quad f'(x)$$

$$\lim_{x \to a+} \quad f(x) = \pm\infty \quad \text{oder/und}$$

$$\lim_{x \to a-} \quad f(x) = \pm\infty$$

Umkehrfunktion:



x und y Werte werden vertauscht:

Bsp.

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{1}{2} * x - 3\right) =$$

$$y(x) = \frac{1}{2} * x - 3$$

$$x(y) = 2 * y + 6$$

$$f^{-1}(x) = 2 * \left(\frac{1}{2} * x - 3\right) + 6$$

Eine Funktion f(x) heisst umkehrbar, wenn aus x1 ≠ x2 stest folgt f(x1) ≠ f(x2).
Wird als Umkehrfunktion oder Inverse Funktion bezeichnet.

Symbol:

$x = f^{-1}(y)$ y ist jetzt sie unabhängige Variable, x sie Abhängige.

Im gewohnten Korddinatensystem: $y = f^{-1}(x)$

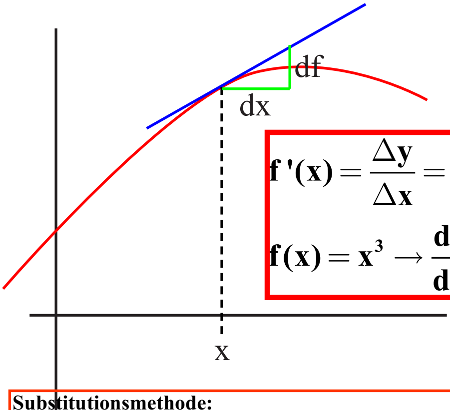
Umkehrfunktionen werden immer über 45° des ersten und dritten Quadranten gespiegelt.

<u>Umkehrfunktionen Arcus- und Areafunktionen:</u>

<u>Arcusfunktionen</u> : sin-1, cos-1, tan-1 man fragt nach dem Bogen y (Arcus), dessen Sinus Cosinus oder Tangens x ist.

<u>Areafunktionen</u> : Umkehrfunktion der Hyberbolischen Funktionen
y=arsinh(x) (lies: area sinus hyperbolicus x)
y=arcosh(x), y=artanh(x), y=arcoth(x)

Von Hand Integrieren:



Funktionsreihen:
für den Grenzwert, falls er existiert f(x)

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(\cos(x))^{k-1}$$

$$f'(x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{df}{dx}\quad \text{bzw.}\frac{df(x)}{dx}\quad \text{bzw.}\frac{d}{dx}f(x)\quad \text{bzw.}\frac{d}{dx}x^3$$

$$f(x)=x^3\rightarrow\frac{df}{dx}=3*x^2$$

Substitutionsmethode:
Bei einem besimmten Integral kann auf die Rücksubstitution verzichtet werden, wen man die Integrationsgrenzen der Substitutinsgleichung mitsubstituiert.

$$\int fg(x))*g'((x)dx=\int f(u)du$$

$$\int_a^b fg(x))*g'((x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

$$\int\frac{1}{2*y+2}=\frac{1}{2}*\int\frac{1}{y+\frac{1}{2}}$$

Substitution $u=y+\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}*\int\frac{1}{u}=\frac{1}{2}*\ln|u|+C$$

Rücksubstitution :

$$=\frac{1}{2}*\ln\left|y+\frac{1}{2}\right|+C$$

Bsp.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)^4*\cos(x)*dx$$

Substitution: $u=\sin(x),\quad \frac{du}{dx}=\cos(x),\quad dx=\frac{du}{\cos(x)}$

unter Grenze: $x=0\qquad u=\sin(0)=0$

obere Grenze: $x=\frac{\pi}{2}\qquad u=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)^4*\cos(x)*dx=\int_0^1 u^4*\cos(x)*\frac{du}{\cos(x)}=\int_0^1 u^4*du=\frac{1}{5}u^5\Big|_0^1$$

mit Rücksubstitution :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)^4*\cos(x)*dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^4*\cos(x)*\frac{du}{\cos(x)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^4*du=\frac{1}{5}u^5\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Rücksubstitution}:=\frac{1}{5}\sin(x)^5\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int x^r = \frac{1}{r+1} * x^{r+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} = \ln x + C$$

$$\int \sin(x) = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) = \sin(x) + C$$

$$\int e^x = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + C$$

$$\int \sinh(x) = \cosh(x) + C$$

$$\int \cosh(x) = \sinh(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} = \tan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arcsinh}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosh}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arctanh}(x) + C$$

$$\int (g(x) + h(x)) = \int g(x) + \int h(x)$$

$$\int (a * g(x)) = a * \int g(x)$$

Substitutionsmethode

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} 2 * x * \cos(x^2) * dx$$

x^2 wird durch y ersetzt

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2 * x$$

$$dy = 2 * x * dx$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} 2 * x * \cos(x^2) dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2) * 2 * x * dx = \int_{y(0)}^{y(\sqrt{\pi})} \cos(y) dy = \int_0^{\pi} \cos(y) dy$$

$$= \sin(y) + C = \sin(\pi) - \sin(0)$$

Partielle Integration:

Der Integrand f(x) wird in "geeigneter" Weise in ein Prdukt aus zwei Funktionen u(x) und v'(x) zerlegt.
In einigen Fällen muss man mehrnmals hintereinender partiell integrieren, ehe man auf ein Grundintegral stösst.

$$\int u(x) * v'(x)\, dx = u(x) * v(x) - \int u'(x) * v(x)\, dx$$

$$\int_a^b u(x) * v'(x)\, dx = u(x) * v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x) * v(x)\, dx$$

v‘ besser zum integrieren.
u besser zum differenzieren.

Bsp.

$$\int x * \cos(x) * dx$$

$u(x) = x$ → **Differenziert** $u'(x) = 1$

$v'(x) = \cos(x)$ → **Integriert** $v(x) = \sin(x)$

$$\int x * \cos(x) * dx = x * \sin(x) - \int 1 * \sin(x) * dx$$

$$= x * \sin(x) + \cos(x) + C$$

Achtung: Beim unbestimmten Integral (keine Grenzen) C nicht vergessen!

Bsp.

$$\int_0^\pi x^2 * \cos(x) * dx$$

$u(x) = x^2$ → **Differenziert** $u'(x) = 2 * x$

$v'(x) = \cos(x)$ → **Integriert** $v(x) = \sin(x)$

$$= x^2 * \sin(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2 * x * \sin(x) * dx$$

$u(x) = 2 * x$ → **Differenziert** $u'(x) = 2$

$v'(x) = \sin(x)$ → **Integriert** $v(x) = -\cos(x)$

$$= x^2 * \sin(x)\Big|_0^\pi - \left(2 * x * (-\cos(x)) - \int_0^\pi 2 * -(\cos(x)) * dx\right)$$

$$= x^2 * \sin(x)\Big|_0^\pi - \left(2 * x * (-\cos(x)) - (-2 * \sin(x))\right)\Big|_0^\pi$$

$$= x^2 * \sin(x)\Big|_0^\pi - \left(2 * x * (-\cos(x)) + 2 * \sin(x)\right)\Big|_0^\pi$$

$$= x^2 * \sin(x) + 2 * x * \cos(x) - 2 * \sin(x)\Big|_0^\pi$$

Partialbruchzerlegung:

Beispiel: $\frac{2}{1-x^2}$

1.Polynomdivision, Falls Grad des Nenners < als Grad des Zähler

2.Nenner in faktoren zerlegen und Nullstellen berechnen:

$1-x^2 = 0 \quad \text{Nullstellen} \quad x = -1 \quad x = 1$

$$1-x^2 = -(x-1)*(x+1)$$
$$= (1-x)*(1+x)$$

3.Ansatz:

$$\frac{\boxed{2}}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$$

4.A und B berechnen:

$$\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A*(1+x)+B*(1-x)}{(1-x)*(1+x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

$$2 \equiv A*(1+x)+B*(1-x)$$

$$2 \equiv (A-B)*x+A+B$$

$A-B=0$ **// keine x Anteile**

$A+B=\boxed{2} \qquad A=1 \quad B=1$

5.A und B einsetzen:

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$$

6.Integrieren mit Ln (Brüche)

$$\frac{\boxed{1}-\boxed{x^2}}{x*(x-2)^2}$$ **Zähler ist schon faktorisiert**

$$\frac{1-x^2}{x*(x-2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$ **// immer alle n Grade einbeziehen**

$$1\text{-}x^2 \equiv A*(x-2)^2+B*x*(x-2)+C*x$$

$$1\text{-}x^2 \equiv (A+B)*x^2+(-4*A-2*B+C)*X+4*A$$

$$A+B=\boxed{-1}$$

$$-4*A+B+C=0$$ **// kein x Anteil**

$$4*A=\boxed{1}$$

$$\frac{A}{(a*x+b)^n}$$ **oder** $$\frac{A*x+B}{(a*x^2+b*x+c)^n}$$

Wenn x^2 vorkommt, dann $A*x+B$

bei $(x\text{-}1)^3$ $$\frac{A}{(x-1)}+\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{A}{(x-1)^3}$$

Nullstellen ermitteln:

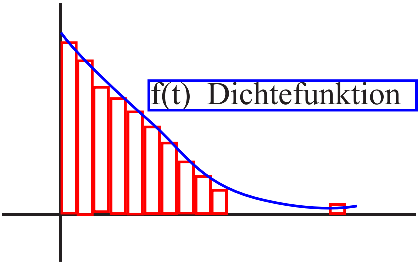
$3*x^2*24*x+45$ **//=0 Nullstellen 5 und 3**

$=3*(x-3)*(x-5)$

TR : factor

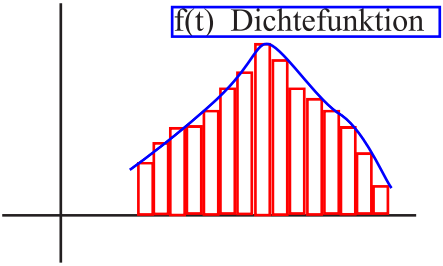
<u>irreduzibel:</u>
Wenn es keine Nullstellen hat.
<u>echt gebrochenrational:</u>
Wenn der Grad des Zähler kleiner ist als der Nenner
<u>unecht gebrochen:</u>
Wenn der Grad des Zählers grösser ist als der Nenner

Schwerpunkt oder „empirischer Mittelwert“:



Wartezeiten, Lebensdauern

Dichtefunktion $f(t) = \lambda * e^{-\lambda * t}$



Messungen, Wägungen

$$Dichtefunktion = \frac{1}{\sqrt{2*\pi}} * e^{-\frac{1}{2}*(x-\mu)^2}$$

Mittelwert $\bar{t}$ ist geometrisch der Schwerpunkt der Fläche des Histogramms.

$$\bar{t} = f(t_1)*\Delta*t_1 + f(t_2)*\Delta*t_2 + ... + f(t_n)*\Delta*t_n$$

$$f(t_1)*\Delta = Flächer \qquad t_1 = Ort$$

$$\bar{t} = \frac{n_1}{n}*t_1 + \frac{n_2}{n}*t_2 + ... + \frac{n_n}{n}*t_n$$

$$\bar{t} = \sum_{i=1}^{n} t_i * f(t_i$$

t in der Mitte der Stabbreite

$$\bar{t} = \int t * f(t)dt$$

Allgemein:

$$f(t_i) = \frac{n_i}{\Delta t * n}$$

n = Anzahl Messungen, n_i = Anzahl Messungen in der Klassenmitte t_i

Δt = Zeitabstand

Differenzieren von Hand:

Differnzieren mit trennbaren Veränderlichen:

ist die Gleichung von der Bauart : $\boxed{y' = g(x) * h(y)}$ **, dann:**

Beispiel $y' = -2 * x * y^2 \ , \quad y(0) = 1$

1.Variablen "sortieren":

$y' = -2 * x * y^2 \qquad |: y^2$

2.y' selektieren und ersetzen:

$y' * \frac{1}{y^2} = -2 * x \qquad |y' = \frac{dy}{dx} \qquad dy = y' * dx$

$\frac{1}{y^2} * \frac{dy}{dx} = -2 * x$

$\frac{1}{y^2} * dy = -2 * x * dx \qquad |\int$ **beidseitiges integrieren**

3.beidseitiges Integrieren:

$\int \frac{1}{y^2} * dy = \int -2 * x * dx$

$-\frac{1}{y} = -x^2 + C$

$y = \frac{1}{x^2 - C}$

4.C mit der Anfangsbedingung errechnen

$1 = \frac{1}{0^2 - C} \qquad |C = -1$

allgemeine Lösung: Lösung der Differnzialgleichung ist eine Kurvenschar

$y(x) = \left(\ln \frac{1}{2} * x^2 + C \right)$

partikuläre Lösung: Lösung der Differentialgleichung ist eine Funktion

$y(x) = \left(\ln \frac{1}{2} * x^2 + \frac{1}{2} \right)$

Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung:

ist linear, wenn sie folgende Gestalt hat: $\boxed{y' + p(x) * y = q(x)}$
$p(x)$ und $q(x)$ sind Funktionen, die nur von x aber
nicht von y abhängig sind.
homogene Differentialgleichung, wenn $q(x) = 0$
inhomogen, wenn $q(x) \neq 0$.

Beispiel: $y' + \tan(x) * y = 2 * \sin(x) * \text{cox}(x)$

1.homogener Teil lösen (alles was von y abhängt)

$$y' + \tan(x) * y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\tan(x) * y \qquad | * dx \quad : y$$

$$\int \frac{1}{y} * dy = \int -\tan(x) * dx$$

$$\ln|y| = \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} * dx$$

$$\ln|y| = \ln|\cos(x)| + C \qquad | e^{()}$$

$$y = K * \cos(x)$$

$$y(x) = K(x) * \cos(x)$$

2.Variation der Konstanten:

Ansatz: $y = K(x) * \cos(x) \qquad \rightarrow$ **Störfunktion**

$$y' = \int K(x) * \cos(x) = K'(x)*\cos(x) - K(x)*\sin(x)$$

3.Einsetzen in der Differentialgleichung:

$$\underbrace{K'(x)*\cos(x) - K(x)*\sin(x)}_{y'} + \tan(x)*\underbrace{K(x)*\cos(x)}_{y} = 2*\sin(x)*\cos(x)$$

$$K'(x)*\cos(x) - K(x)*\sin(x) + K(x)*\sin(x) = 2*\sin(x)*\cos(x)$$

$$K'(x) = 2 * \sin(x)$$

$$K(x) \rightarrow \text{integrieren} \rightarrow \int 2 * \sin(x)$$

$$K(x) = -2 * \cos(x) + C$$

$$y(x) = (-2 * \cos(x) + C) * \cos(x)$$

inhomegen : Alles was von y abhängig ist.

Differentialgleichung der 2. Ordnung:

$y''+a*y'+b*y=0$ **homogene Differentialgleichung**

$y''+a*y'+b*y=f(x)$ **inhomogene Differentialgleichung**

a,b sind Konstanten

f(x) ist die Störfunktion

1. die charakteristische Gleichung erstellen:

$$y''+a*y'+b*y=0$$
$$\downarrow$$
$$\lambda^2+a*\lambda^1+b*\lambda^0=0$$

2. mögliche Fälle für die Lösung:

1. $y(x)=C_1*e^{\lambda_1*x}+C_2*e^{\lambda_2*x}$ λ_1, λ_2 **zwei reelle Lösungen**
2. $y(x)=(C_1*x+C_2)*e^{\lambda*x}$ $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ **eine reelle Doppellösung**
3. $y(x)=e^{r*x}*(C_1*\cos(w*x)+C_2\sin(w*x))$
   $\lambda=r\pm i*w$ **zwei konjugiert komplexe Lösungen**

konstante Funktion:

$y_p=c_0$ **Parameter:** c_0

Polinom, oder lineare Funktion:

$y_p=c_0+c_1*x+...+c_n*x^n$ **Parameter:** $c_0...c_n$

Trigonometrische Funktion:

$g(x)=A*\sin(\omega*x)$

$g(x)=B*\sin(\omega*x)$

$g(x)=A*\sin(\omega*x)+y_p=B*\cos(\omega*x)$

$y_p(x)=C_1*\sin(\omega*x)+C_2*\cos(\omega*x)$ **Parameter :** C_1,C_2

oder $C*\sin(\omega*x+\delta)$ **Parameter :** C,δ

e-Funktion:

$g(x)=A*e^{b*x}$

$y_p=C*e^{b*x}e$ $y_p=C*e^{b*x}e$ **Parameter C**

$x'' - 4*x = t^3 - 1$

$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

1.homogene Lösung :

$x'' - 4*x = 0$

charkteristisch Gleichung :

$l^2 - 4 = 0 \qquad l_1 = 2 \qquad l_2 = -2$

$x_h(t) = C_1 * e^{2*t} + C_2 * e^{-2*t}$

2.partikuläre Lösung :

Partikuläre Lösung ist immer im Lösungsformel gleichen Grades (gleicher Form)

wie $x_p(t)$ bei $x_p(x) = \sin(x) + \cos(x)$ dann $x_p(x) = A*\cos(w*x) + B*\sin(w*x)$

Ansatz Parametervergleich :

$x_p(t) \;=\; b_0 + b_1*t + b_2*t^2 + b_3*t^3 \;=\; t^3 - 1$

$b_0 = -1$
$b_1 = 0$
$b_2 = 0$
$b_3 = 1$

$y_p = a*x^3 + b*x^2 + c*x + d \qquad y_p' = 3*a*x^2 + 2*b*x + c$

$y_p'' = 6*a*x + 2*b$

$y_p'' - 4*y_p = t^3 - 1$

$6*a*x + 2*b - 4*(a*x^3 + b*x^2 + c*x + d) = t^3 - 1$

ausmultipliziert :

$6*a*x + 2*b - 4*a*x^3 - 4*b*x^2 - 4*c*x - 4*d = t^3 - 1$

zusammenfassen Parametervergleich :

$$\begin{pmatrix} 6*a - 4*c = 0 \\ -4*a = 1 \\ -4*b = 0 \\ 2*b - 4*d = -1 \end{pmatrix} \qquad \left| \begin{matrix} a = -\frac{1}{4}*x^3 \\ b = 0*x^2 \\ c = -\frac{3}{8}*x \\ d = \frac{1}{4} \end{matrix} \right|$$

$x_p(t) = -\frac{1}{4}*x^3 - \frac{3}{8}*x + \frac{1}{4}$

$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 * e^{2*t} + C_2 * e^{-2*t} - \frac{1}{4}*x^3 - \frac{3}{8}*x + \frac{1}{4}$

allgemeines:

Allgemeines:

$2*x=\ln(y) \quad /e^{0}$

$e^{2*x}=|y|$

$e^{y}=e^{x} \quad /\ln()$

$y=\ln(e^{x}+C)$

$\ln(y)=\ln(x)+\frac{1}{x}+C \quad /e^{0}$

$y=K*x+e^{\left(\frac{1}{2}\right)}$

$\int e^{n*x}=\frac{1}{n}*e^{n*x}$

$K'*e^{-x}=e^{x}$

$K'=e^{2*x}$

$\int e^{2*x}dx=\frac{1}{2}*e^{2*x}+C$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

$\cot=\frac{\cos}{\sin}$

$\int \ln(x)*dx=x*\ln(x)-x+C$

$\ln(2)=5 \quad /e^{()}$

$2=e^{5}$

$e^{2}=5 \quad /\ln$

$2=\ln(5)$

Allgemein:

$e^{x-y}=\frac{e^{x}}{e^{y}}$

Wenn Zähler Ableitung vom Nenner:

$\int \frac{2*x-1}{x^{2}-x+1}dx=\ln(x^{2}-x+1)$

$\int \frac{1}{x}dx=\ln(x)$

$\ln|x|-\ln|x+1|+C_{2}=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C_{2}$

$2*\ln|x|=\ln|x|^{2}$

$\cot(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$\ln|x|+\frac{1}{x}+C \quad |e^{()}$

$=x*e^{\frac{1}{2}}*e^{C}$

$\int -\frac{1}{x^{2}}=\frac{1}{x}+C$

$\int \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}=\ln(\text{Nenner}),\ \text{falls Nenner'=Zähler}$

$4*\ln|x^{2}-x+1|+C \quad |e^{()}$

$=(x^{2}-x+1)^{2}*K$

$-\frac{1}{3}*\ln|x|+C=\ln|x|^{-\frac{1}{3}}+C$

y‘ und y“:

$$y''*\cos(x)+y'*\sin(x)=0$$

substituieren :

$$u=y' \qquad u'=y''$$

$$u'*\cos(x)+u*\sin(x)=0$$

$$u'=-u*\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$u'=\frac{du}{dx}$$

$$1*\frac{du}{dx}=-u*\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\int\frac{1}{u}du=-\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$$

$$\ln|u|=\ln|\cos(x)|+C$$

$$u=K*\cos(x)$$

rücksubstituon :

$$y'=K*\cos(x) \qquad\qquad y=K*\sin(x)+C$$

Substituieren bei Differentialgleichungen:

$$y''+a*y'=0$$

$$u=y'$$

$$u'+a*u=0$$

$$\frac{du}{dt}=-au$$

$$\int\tfrac{1}{u}*du=\int -a*dt$$

$$\ln u=-a*t+C$$

$$u(t)=K*e^{-a*t}$$

$$y(t)=\int u(t)=\int K*e^{-a*t}=-\frac{K}{a}*e^{-a*t}+C_1$$

komplexe (imaginäre) Zahlen:

Zeichen i $\mathbb{C}$

$e^{i*\pi} = -1$

$i^{-4} = 1$

$i^{-3} = i$

$i^{-2} = -1$

$i^{-1} = \frac{1}{i^1} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$

$i^0 = 1$

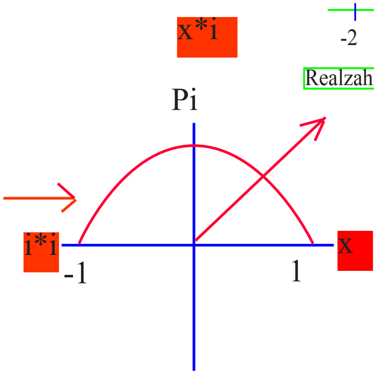
$i^1 = i$

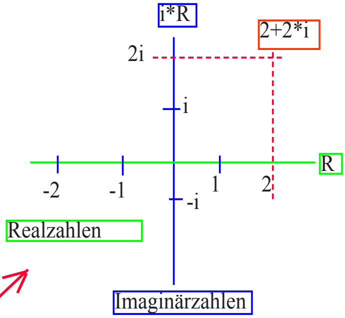
$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$ ....-1, -i , 1 , i ....





komplexe Lösungen sind immer konjugiert komplex

TR: complex / cSolve

eine Multiplikation von x mit i bewirkt, eine drehung des Pfeils von x im Gegenuhrzeigesinn um 90°.

$z = x + y * i = \text{Realteil} + \text{Imaginärteil} * i$

$i = \sqrt{-1}$

$i * i = i^2 = -1$

$\bar{z} = \text{Gegenzahl zu } z = \text{konjugiert komplexe Zahl} = x - y * i$

$|z|^2 = x^2 + y^2 = z * \bar{z}$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$e^{i*\pi} = -1$

$i^{641} = i^{640\text{(grösste Zahl durch 4 teilbar)}} * i = 1*i = i$

$e^{i*\delta} = \cos(\delta) + i * \sin(\delta)$

$|e^i| = 1$

$z = (1 + e^{i*t})$

konjugiert komplex:

$\bar{z} = (1 + e^{-i*t})$

eine komplexe Zahl $z = x + y * i$ **ist ein Vektor** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **in der Gausschen Ebene**

Vektor = Zeiger

Menge der komplexen Zahlen : $\mathbb{C}$

$x =$ **Realanteil von z**

y = Imaginäranteil von z (z=y*i ist rein imaginär)

Achtung nur y ist Imaginärteil

$|z| =$ **ist der Betrag einer komplexen Zahl** $= \sqrt{x^2 + y^2}$

$x_1 + y_1 * i = x_2 + y_2 * i \quad x_1 = x_2 \quad y_1 = y_2$

eine Gleichung liefert also 2 Zahlen

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) * i$

$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) * i$

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

$z + 0 + 0 * i = z$

$-z = (-x) + (-y) * i$ **so dass z+(-z)=0**

immer z(Zahl) = x(Realteil) + y(Imaginärteil)*i

Multiplikation :

$z_1 * z_2 = (x_1 + y_1 * i) * (x_2 + y_2 * i) =$

$x_1 * x_2 + x_1 * y_2 * i + y_1 * x_2 * i + y_1 * y_2 * i^2 =$ **Achtung** i^2 **wird** -1

$(x_1 * x_2 - y_1 * y_2) + (x_1 * y_2 + y_1 * x_2) * i$

$z_1 * z_2 = z_2 * z_1$

$(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$

$z_1 * (z_2 + z_3) = z_1 * z_2 + z_1 * z_3$

$z = 2 + 3 * i$ gesucht z^{-1}

$$z^{-1} = \left(\frac{1}{z * \bar{z}}\right) * \bar{z}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 * \left(\frac{1}{z_2 * \bar{z_2}}\right) * \bar{z_2}$$

Aufsplittung Realteil Imaginärteil:

$$x^2 + 2 * x * y * i - y^2 = -7 + 24 * i$$

$$x^2 - y^2 = -7$$

$$2 * x * y = 24$$

$$\mathrm{Im}(x - y * i + 1) + i * \mathrm{Re}(-x - y * i + 2) = -0.5 - 6 * i$$

$$-y + i * (-x + 2) = -0.5 - 6 * i$$

Bsp.

$$\frac{13 - 5 * i}{1 - i} = (13 - 5 * i) * \frac{1}{(1 - i) * (1 + i)} * (1 + i)$$ z quer oder z konjugiert

$$= (13 - 5 * i) * \frac{1}{1 - i^2} * (1 + i) = (13 - 5 * i) * \frac{1}{2} * (1 + i) = \frac{1}{2} * (13 + 13 * i - 5 * i + 5)$$

$$= 9 + 4 * i$$

$z * \bar{z} = \mathrm{Re}(7)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$ wird zur reellen Zahl

$z + \bar{z} = 2 * \mathrm{Re}(z)$ wird zur reellen Zahl

$$z - \bar{z} = 2 * \mathrm{Im}(z) * i$$

$z_1 = z_2$, wenn $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ und $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$

Normalform von $\frac{1}{(2+3*i)} = \frac{1}{(2+3*i)} * \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{1}{(2+3*i)} * \frac{(2-3*i)}{(2-3*i)} =$

$$\frac{2}{13} - \frac{3}{13} * i$$

$w^2 + w = -3 + 15 * i$ w=?

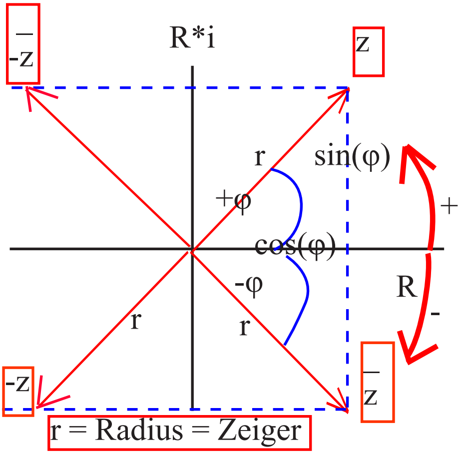
Ansatz : $w = a + b * i$

$$(a + b * i)^2 + (a + b * i) = -3 + 15 * i$$

$$\sqrt{i} = ?$$

Ansatz : $w = \sqrt{i}$ $w^2 = i$

$$(a + b * i)^2 = i$$



Kartesische Form oder Normalform:

$z = x + y * i$

Trigometrische Form:

$z = r * (\cos\varphi + i * \sin\varphi)$

Exponentialform oder Polarform:

$z = r * e^{i*\varphi}$

φ heisst Argument von z, kurz arg(z)

Argument Bereich $-\pi$ bis π $(\text{Modulo } \pi)$

r ist der Radius von z, $r=|z|$

Umrechnung:

$z = x + y * i \quad , x \neq 0$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ **und** $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ **sofern x>0**

$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$ **sofern x<0**

ist x=0 und y>0 $\varphi = \frac{\pi}{2}$

ist x=0 und y<0 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Arctan:
1. und 2. Quadrant positiv +
3. und 4. Quadrant negativ -

ist $z = r * e^{i*\varphi}$ **so gilt** $x = r * \cos(\varphi)$ **und** $y = r * \sin(\varphi)$

Kartesisch → trig. Form

$z = x + i * y$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\arctan\varphi = \frac{y}{x}(+\pi)$

wenn x < 0

$z = r * e^{\varphi * i}$

trig. Form → Kartesisch

Umgekehrt:

$y = r * \sin(\varphi)$

$z = r * \cos(\varphi)$

$z = z + y * i$

Multipikation, Division bei trigonometrischen Form:

$$z_1 * z_2 = r_1 * r_2 * \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i * \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} * \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i * \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

Multipikation, Division bei Exponentialform:

$$z_1 * z_2 = r_1 * r_2 * e^{i*(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} * e^{i*(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Bei der Multiplikation werden Radien multipliziert, Argumente addiert.

Bei der Division werden Radien dividiert, Argumente subtrahiert.

Potenzen:

$$z = r * e^{i*\varphi}$$

$$z^n = r^n * e^{i*n*\varphi}$$

bei kartesicher Form:

$$\rightarrow r \text{ und } \varphi \text{ ausrechnen } \left(r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)(\text{bei } x < 0 \text{ -}180°) \right)$$

$$\rightarrow z = e^{x*\pi*i}$$

$$\rightarrow z^n = e^{x*\pi*n*i}$$

$$\rightarrow \text{in kartesische Form zurück } \left(y = r * \sin(\varphi) \quad x = r * \cos(\varphi) \right)$$

n-te Wurzel:

$$z^n = a \qquad n = ?$$

$$r^n * (\cos(\delta) + i * \sin(\delta)) = a_0 * (\cos(\alpha) + i * \sin(\alpha))$$

$$r^n = a_0 \qquad r = \sqrt[n]{a_0}$$

$$\delta = \frac{\alpha + k * 2 * \pi}{n} \qquad k \in \mathbb{Z} \quad (0,1,2,3,4......)$$

$$\sqrt[x]{r} * e^{\frac{\alpha + k*2*\pi}{n}}$$

Bsp: $z = \sqrt{4 - 2 * i} = r * e^{i*\varphi}$

$$z^2 = 4 - 2 * i \qquad = r^2 * e^{i*2*\varphi} \qquad = \sqrt{20} * e^{i*\alpha}$$

$$r = \sqrt[4]{20} \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{-2}{4}\right)$$

$$\varphi_1 = \qquad 2 * \varphi = \alpha + k * 2 * \pi \qquad \varphi_1 = \frac{\alpha + 0 * 2 * \pi}{2} \qquad \varphi_1 = \frac{\alpha}{2}$$

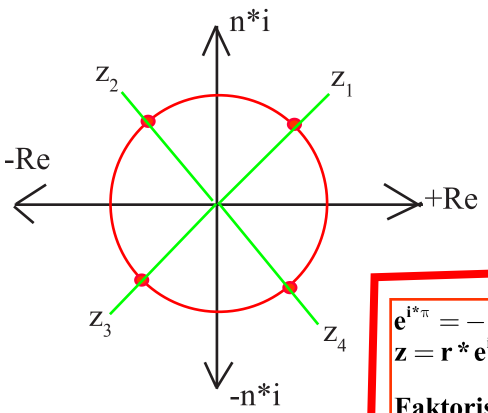
$$\varphi_2 = \qquad \frac{\alpha + 1 * 2 * \pi}{2} \qquad \varphi_2 = \frac{\alpha + 2 * \pi}{2}$$

$$z = \sqrt[4]{20} * e^{\varphi*i}$$

Für n-te Wurzel gibt es n Lösungen!!!!

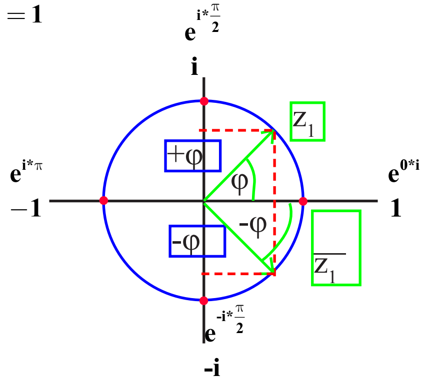
Allgemein:

$$z^n = r^n * e^{i*\left(\frac{\delta + k*2*\pi}{n}\right)} \qquad 0 \le k \le (n\text{-}1)$$



Einheitskreise mit $z = r * e^{i*\varphi}$:

$|z| = r = 1$



beim Einheitskreis:
Radius=1

$e^{i*\pi} = -1$

$z = r * e^{i*\delta}$

Faktorisierung & Nullstellen :

$z^3 = 1$

$z^3 - 1 = 0$

$$z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} * i$$

$$z^3 - 1 = (z-1) * \left(z - \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} * i\right]\right) * \left(z - \left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} * i\right]\right)$$

$z^4 = -81$

$r^4 * e^{4*i*\delta} = 81 * e^{i*\pi + k*2*\pi*i}$

$$\left| \begin{array}{l} r^4 = 81 \\ 4 * i * \delta = i * \pi + k * 2 * \pi \end{array} \right| \qquad r \square 3 \square \delta = \frac{\pi}{4} + k * \frac{\pi}{2}$$

$$z = 3 * e^{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k*\pi}{2}\right)*i} \qquad k \square 0 \square 1 \square 2 \square 3$$

$z^3 = 2 + i$

$z = r * e^{i*\delta}$

$z^3 = r^3 * e^{i*\delta*3}$

$2 + i = \sqrt{5} * e^{i*\arctan(0.5)}$

$r^3 * e^{i*\delta*3} = \sqrt{5} * e^{i*\arctan(0.5) + k*2*\pi*i}$

$$3 * \delta = \arctan(0.5) + k * 2 * \pi = \frac{1}{3} * \arctan(0.5) + \frac{k*2*\pi}{3} \qquad 0 \le k \le 2$$

$$3 * \delta = 5^{\frac{1}{6}} * e^{\left(\frac{1}{3}*\arctan(0.5) + \frac{k*2*\pi}{3}\right)*i}$$

$$z_k = 5^{\frac{1}{6}} * e^{\left(\frac{1}{3}*\arctan(0.5) + \frac{k*2*\pi}{3}\right)*i}$$

$z = e^{i*t} = \cos(t) + i*\sin(t)$

$\bar{z} = e^{-i*t} = \cos(t) - i*\sin(t)$

$e^{i*t} + e^{-i*t} = 2*\cos(t)$

$\cos(t) = \dfrac{e^{i*t} + e^{-i*t}}{2} = \cosh(i*t)$

$e^{i*t} - e^{-i*t} = 2*i*\sin(t)$

$\sin(t) = \dfrac{e^{i*t} - e^{-i*t}}{2*i} = \dfrac{1}{2}*\sinh(i*t)$

$\cosh(z) = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$

$\sinh(z) = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$

$e^{i*z} = \cos(z) + i*\sin(z)$

$\cos(z) = \cosh(i*z)$

$\sin(z) = \dfrac{1}{2}\sinh(i*z)$

$e^{z} = e^{z} * e^{i*y}$

$\cos(z) = \dfrac{e^{i*z} + e^{-i*z}}{2}$

$\sin(z) = \dfrac{e^{i*z} - e^{-i*z}}{2*i}$

$\tan(z) = \dfrac{\sin(z)}{\cos(z)}$

$\cot(z) = \dfrac{\cos(z)}{\sin(z)}$

$e^{z_1} * e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

$\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$

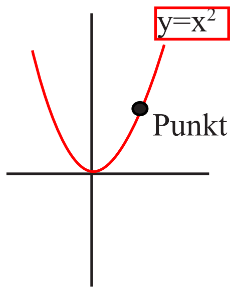
$e^{-z} = \dfrac{1}{e^{z}}$

$e^{z} \neq 0$ für jedes z

$\dfrac{1-e^{i*t}}{1+e^{i*t}} = \dfrac{\left(1-e^{i*t}\right)*\left(1+e^{-i*t}\right)}{\left(1+e^{i*t}\right)*\left(1+e^{-i*t}\right)} =$

$\dfrac{-\sinh(i*t)}{1+\cosh(i*t)} = \dfrac{i*\sin(t)}{1+\cos(t)}$

$$\boxed{\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1}$$



Punkt z wandert aud der Parabel

$y = x^2$

$z = x + i*y$

$also: z = x + i*y$

$z^{-4} = -2$

$r^4 * e^{-i*4*\pi} = 2*e^{i*\pi+2*k*\pi}$

$\varphi = \dfrac{-\pi}{4} + k*\dfrac{\pi}{2} \qquad k = 0,..,3$

$(z+1)^3 = 2 \quad \rightarrow \text{substituiere} \rightarrow \omega^3 = 2$

$(1-2*i)^{16} = \sqrt{5}^{16} * e^{i*\arctan(-2)*16} = 5^8 * e^{i*\arctan(-2)*16}$

$(-1+i)^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \text{substituiere} \quad \rightarrow \omega^2 = (-1+i)$

$r^2 * e^{i*2*\varphi} = \sqrt[4]{2} * e^{i*\frac{3}{4}*\pi+k*2*\pi*i}$

$\varphi_k = \dfrac{3}{8}\pi + k*\pi$

$e^{i*t} + e^{2*i*t} = \cos(t) + \cos(2*t) + i*\left(\sin(t) + \sin(2*t)\right)$

$2^{-i} = e^{-i*\ln(2)}$

$e^{-y} = 7 \quad \rightarrow \quad y = -\ln(7)$

$e^{-b} = 2 \qquad /\ln$

$-b = \ln(2)$

$\ln(-3) = \ln(-1) + \ln(3)$

$w = \ln(-1)$

$e^{w} = -1$

$w = (\pi + k*2*\pi)*i$

$e^{x} = e^{y} * e^{z} =$

$x = y + z$

bei:

$(z+i)^2 = 2*i$

$\left(z - 2*\bar{z}\right) = 1$

Klammer Substituieren

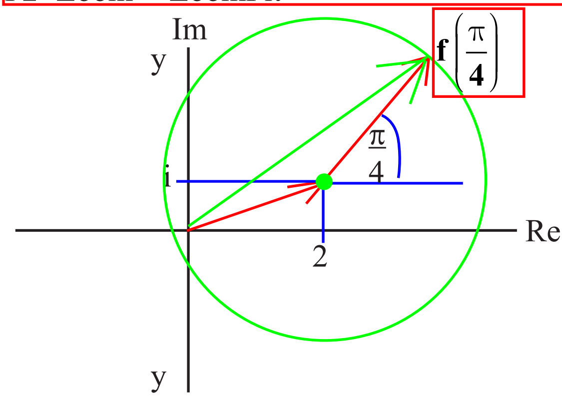
$\dfrac{-1-i}{-2} \quad \rightarrow *(-1) \quad \rightarrow \dfrac{1+i}{2}$

$\sum_{n=0}^{\infty} n*e^{-n*i}*z^n \quad \rightarrow \quad a_n = n*e^{-n*i}$

TI 89:
Winkel vom Zeiger -> angle
für imaginäres Gleichungssystem -> complex / cSolve
MODE ->Complex Format
->POLAR
->RECTANGULAR (oder REAL)
->RECT (Kartesisches Format)

Funktionen:
MODE -> GRAPH -> PARAMETRIC
HOME: Funktion abspeichern f(t) ->STO Achtung: immer t verwenden als Unbekannte!!!
xt1=real(f(t))
yt1=imag(f(t))
F2=Zoom ->ZoomFit

|z-2|=1
|(x+i*y)-2|=1
Kreis mit R=1 mit Mittelpunkt bei Re(2)



$$f(t) = 2 + i + 3 * e^{i*t} \quad \text{mit } t \geq \frac{\pi}{4}$$

$$\cos(b*y) + i*\sin(b*y) = e^{i*b*y}$$

Achtung: imaginäre e Funktionen sind periodisch!

Konvergenzradien :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{k}$$

Konvergenzradius r:

$$r = \lim_{r\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

Für welche z $\in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i*n*z}}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{i*z}}{3}\right)^n \quad q = \frac{e^{i*z}}{3} \quad q < 1$$

Für welche z konvergiert die Reihe aus (a) gegen $1+i$:

$$\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\left(\frac{e^{i*z}}{3}\right)} = 1+i$$

Konvergenzradius ist der Radius (r = 1) eines Kreises

Innerhalb dieses Kreises konvergiert die Reihe.

Integration und Ableiten von komplexen Zahlen:

-trennen von Realteil und Imaginärteil

-i als Konstante ausserhalb der Integration

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i * \int_a^b v(t)dt$$

Realteil Imaginärtei

$$\int e^{p*t}dt \quad \text{p ist eine imaginäre Zahl}$$

$$= \int e^{x*t} * e^{i*t*y}dt$$

$$= \int e^{x*t} * \cos(ty) + e^{x*t} * \sin(ty) * i$$

Die Ableitung von f(t) ist:

$$f'(t) = x'(t) + i * y'(t)$$

Die Integration von f(t) ist:

$$\int f(t) = \int x(t) + i * \int y(t)$$

Realteil, Imaginärteil

Integrations und Ableitungsregeln sind gleich wie beim herkömmlichen Zahlenraum!!!!

Falls ein Gebiet G $\subseteq \mathbb{C}$ gibt, das [a,b] enthält und falls f auf G eine Stammfunktion F hat:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \qquad \text{F ist Stammfunktion}$$

$f(z) = e^{p*z}$ ist definiert auf dem Gebiet G und hat dort Stammfunktion:

$$F(z) = \frac{1}{p} * e^{p*z}$$

$$\int_0^1 (\bar{t} + i)dt = \int_0^1 (t + i)dt \quad \rightarrow \text{nur die Ortskurve}$$

Für eine Funktion nennt man jede Lösung z der Gleichung $f(z) = z$ einen Fixpunkt

$$f(z) = a * z + b \qquad z = ?$$

$$z = \frac{-b}{a-1}$$

$$\text{Fixpunkt} = 1 \qquad a * 1 + b = 1$$

bildet $z = 1 + i$ auf $\omega =$ -2 ab $\quad a * (1+i) + b = -2$

Wurzelortskurve:

Wurzelortskurve:
Da man die Nullstellen eines komplexen Polynoms auch „Wurzel“ nennet, heisst die Kurve, welche duch Aufzeichnung aller Nullstellen entsteht Wurzelortskurve.
Dabei durchläuft ein Parameter k meistens alle reellen Zahlen.

Beispiel :

$$P(z) = z^2 + z + 0.5*k$$

k =Nullstellen von P(z)

Ansatz: Lösungsformel $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4*a*c}}{2*a}$

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-2*k}}{2}$$

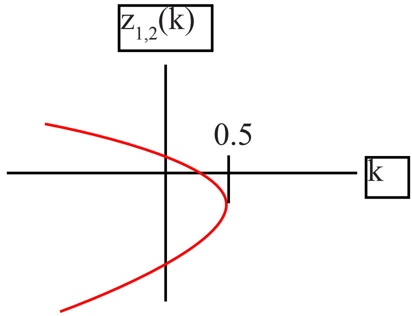
reell für $1-2*k \geq 0 \quad k \leq \frac{1}{2}$

komplex für $1-2*k < 0 \quad k > \frac{1}{2}$

$$z_{1,2} = \begin{cases} -\frac{1}{2}*\left(1 \pm \sqrt{1-2*k}\right), & k \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}*\left(1 \pm \sqrt{2*k-1}*i\right), & k > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Wertebereich von $-\frac{1}{2}*\left(1 \pm \sqrt{1-2*k}\right)$:

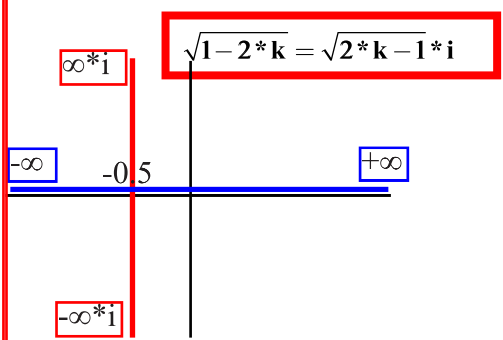
zwei Parabeläste Wertebereich $= \mathbb{R}$



Wertebereich von $-\frac{1}{2}*\left(1 \pm \sqrt{2*k-1}*i\right)$:

Alle $z_{1,2}$ haben den Realteil $-\frac{1}{2}$

Wertebereich von $\pm\sqrt{2*k-1}$ ist $\mathbb{R}$



Achtung i nicht im Taschenrechner beim Imaginärteil eingeben!!!!

zeichnen der Wurzelortskurve TI89:

-Mode->Graph->Parametic

-Als Variable t verwenden!!!

-x_1 Realteil von z_1 $\left(-\frac{1}{2}\right)$

-y_2 positive Wurzel von z_1 $\left(\sqrt{\frac{1}{2}-k}\right)$

-x_2 Realteil von z_2 $\left(-\frac{1}{2}\right)$

-y_2 negative Wurzel von z_2 $\left(-\sqrt{k-\frac{1}{2}}\right)$

-Step , min , max von t einstellen

komplexe Funktionen und Ortskurven:

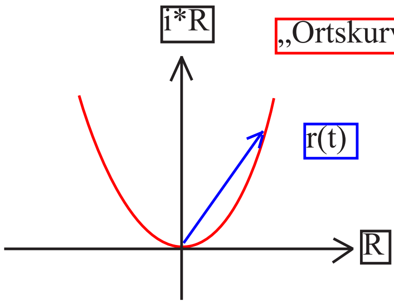
$f: \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

Input ist eine reelle Zahl, Output ist komplex

$$f(t) = t + i * t^2$$

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Re \\ Im \end{bmatrix}$$

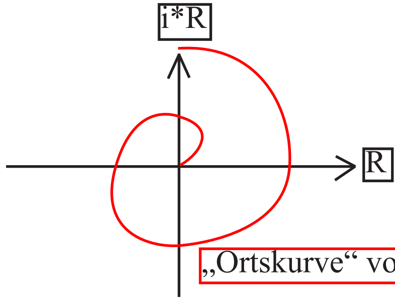
„Ortskurve" von f(t)



Ortskurve ist keine Funktion sondern nur der Output!

$$f(t) = t * e^{i*t}$$ **Kreis mit r = t auf Einheitskreis**

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} t * \cos(t) \\ t * \sin(t) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Re \\ Im \end{bmatrix}$$



„Ortskurve" von f(t)

$f: \quad \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

Bilden komplexe Zahlen auf komplexen Zahlen ab.

Die Inversion: $f(z) = \frac{1}{z}$

Die Zahlen ausserhalb des Einheitskreie werden in den Einheitskreis abgebildet.

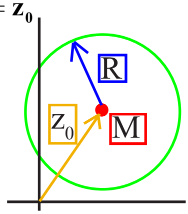
Die Zahlen innerhalb des Einheitskreises werden auf Zahlen ausserhalb des Einheitskreises abgebildet.

Bei Beträgen:

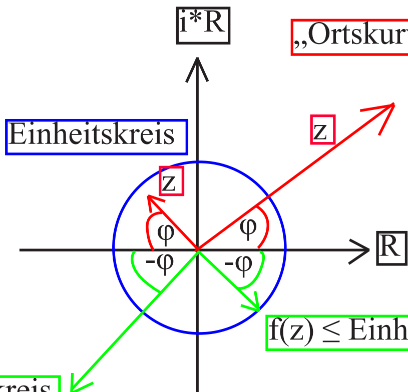
$|z - z_0| = k$

Mittelpunkt $= z_0$

Radius $= k$



„Ortskurve" von f(z)



$f(z) \leq$ Einheitskreis

$f(z) \geq$ Einheitskreis

spezielle Formen von Ortskurven:

Gerade horizontal:

$f(t) = 2 + t * i$

Gerade vertikal:

$f(t) = t + 5 * i$

Teil einer Geraden:

$f(t) = -1 + \frac{1}{7} * i \qquad t > 0$

Kreise mit Mittelpunkt bei 0 und $r = 3$:

$f(t) = 3 * e^{i*t} \qquad 0 \le t < 2 * \pi$

Kreis mit Mittelpunkt bei (4, 5*i) und $r = 2$:

$f(t) = 4 + 5 * i + 2 * e^{i*t} \qquad 0 \le t < 2 * \pi$

Halbkreis mit Mittelpunkt bei 0 und $r = 7$:

$f(t) = 7 * e^{i*t} \qquad 0 \le t < \pi$

Fixpunkte:

z heissen Fixpunkte einer Funktion f(z), wenn

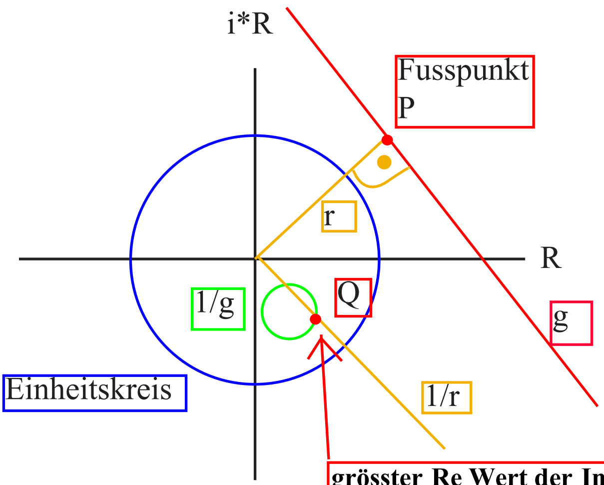
$z = f(z)$

$$f(z) = \frac{1}{1 - z}$$

$$z = f(z) \quad \rightarrow \quad z = \frac{1}{1 - z}$$

$z^2 - z + 1 = 0 \quad \rightarrow$ **Lösungsformel**

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} * i$$



grösster Re Wert der Inversion von g
ist Q, weil P der kleinste Abstand zu 0

$\frac{1}{P}$ **wenn P am kleinsten, nimmt Q den grössten**
Realen Wert an.

Gerade unter Inversion ergibt immer einen Kreis!
g ergibt k

Eine geometrische Reihe ist eine (unendliche) Zahlenfolge der Gestalt:

$$s_1 = a,\ s_2 = a + a * q,\ s_3 = a + a * q + a * q^2, \ldots,$$

$$s_n = a + a * q + a * q^2 + \ldots + a * q^{n-1}$$

s_n heisst die n-te Partialsumme

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} a * q^{k-1}} = \frac{a}{1-q}$$

Grundform

$$s_n = a * \frac{1-q^n}{1-q}, \quad \text{sofern } q \neq 1$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}, \quad \text{für } |q|<1 \quad = a + a*q + a*q^2 + a*q^3 \ldots$$

$$E(\text{Fehler}) = \left|\frac{a}{1-q} - s_n(\text{Partialsumme})\right|$$

$$= \left|\frac{a}{1-q} - a * \frac{1-q^n}{1-q}\right|$$

$$= \left|\frac{a}{1-q}\right| * |q|^n \quad (\text{für } q < 1)$$

$$\boxed{|q| < 1}$$

$$E_n(\text{Wert}) = \frac{a}{1-q(\text{Wert})} * |q * (\text{Wert})|^n$$

q =zweite Partialsumme durch erste Partialsumme

Grundform der geometrichen Reihe:

$a = 30$

$q = 0,7$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 30 * 0,7^{k-1}$$

$a = 2 \quad , \text{Reihe} = 2 - \frac{3}{2} \quad q = ?$

$$2 * q = -\frac{3}{2}$$

Bsp :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^{k-1} \qquad a = 1, q = -\frac{1}{8}$$

$$\frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \ldots \qquad a = \frac{8}{3}, q = \frac{\frac{16}{9}}{\frac{8}{3}}$$

$$0,2323232323 \qquad a = \frac{23}{100}, q = \frac{1}{100}$$

Funktionsreihe:

Eine Funktionsreihe ist eine (unendliche) Zahlenfolge der Gestalt:
s1(x)=u1(x)
s2(x)=u1(x)+u2(x)
s3(x)=u1(x)+u2(x)+u3(x)
sn(x)=u1(x)+u2(x)+u3(x)+...+un(x)
sn(x) heisst n-te partialsumme ans der Stelle x.

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

Funktionsreihen:

für den Grenzwert, falls er existiert f(x)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\cos(x))^{k-1}$$

$$a = 1$$

$$q = x$$

ε_{15} **an der Stelle** $x = 3$

$$\varepsilon_{15} = \left|\frac{a}{1-q}\right| * |q|^n = \left|\frac{1}{1-\cos(3)}\right| * |\cos(3)|^{15}$$

Welchen Fehler En(x) macht man, wenn man an der Stelle x den Grenzwert der Reihe annähert durch die n-te Partialsumme?
Existiert der Grenzwert f(x) einer Funktionsreihe in einem ganzen Bereich D der reellen Zahlen, so heisst f Grenzfunktion. Die Reihe heisst konvergent an der stelle x für jedes x Element von D.

x statt q

Grenzwert $f(x)$

Konvergenz bei Geometrischen Reihen:

$$1 + (q)$$

$$a = 1$$

$$q = () \qquad |q| < 1$$

$$1 = ()$$

$$-1 = ()$$

Konvergenzradius :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n * \frac{n}{2^n} * x^{2*n}$$

substitution $x^{2*n} = x^2 = t$

$$a_k = \frac{(-1)^n * n}{2^n} \qquad a_{k+1} = \frac{(-1)^{n+1} * n+1}{2^{n+1}}$$

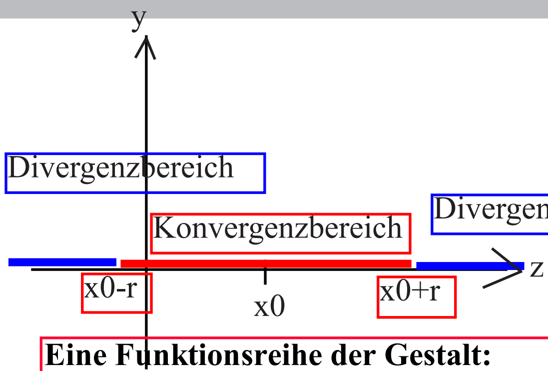
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \left|\frac{(-1)^n * n * 2^{n+1}}{2^n * (-1)^{n+1} * n+1}\right| = \left|\frac{2*n}{(n+1)}\right| =$$

$$\left|2*\frac{n}{n+1}\right| = \left|2*\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}\right| = \left|2*\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right| = 2$$

Rücksubstitution :

$$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

Potenzreihen:



Eine Funktionsreihe der Gestalt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k * (x - x_0)^k$$ **heisst Potenzreihe.**

$a_0, a_1, \ldots$ **heissen Koeffizienten der Potenzreihe**

x_0 **heisst Entwicklungspunkt**

$$r(\text{Konvergenzradius}) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

ist r der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k * (x - x_0)^k$

so konvergiert die Potenzreihe für jeden Wert x mit $|x - x_0| < r$ **und sie divergiert für alle x-Werte mit** $|x - x_0| > r$

x_0 **bei minus +, bei + minus**

a_{n+1} **muss überall wo n vorkommt +1 gerechnet werden**

Bsp :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k} \qquad x_0 = 2,\ a_k = \frac{1}{k}$$

$$a_n = \frac{f^{k-\text{teAbleitung}}(x_0)}{k!}$$

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|1 + \frac{1}{n}\right| = 1$$

Grundform der Potenzreihe:

$$\sum_{K=0}^{\infty} a_k * (x - x_0)^k$$

Beim Konvergenzradius Reihe in diese Form bringen.

Bei Brüchen:

$$0.\overline{101} = \frac{101}{10^3} * \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-3*k}$$

Achtung bei Konvergenzradius:

r=1

$-1 \leq (x-3)(\text{durch substitution}) \leq 1$

$2 \leq x \leq 4$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k * \frac{x^{2*k}}{3^k * (k+1) * \sqrt{k+1}}$$

substituier $u = x^2$

neue Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k * \frac{u^k}{3^k * (k+1) * \sqrt{k+1}}$

Resultat : $u < 3 \qquad -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

$$\frac{x^{5*k+1}}{1+2^k} = \frac{x^6}{3} + \frac{x^{11}}{1+4} + \frac{x^{16}}{1+8} \ldots = x^6 * \left(\frac{1}{3} + \frac{x^5}{1+4} + \frac{x^{10}}{1+8}\right)$$

$u = x^5$

neue Reihe : $\frac{1}{1+2} + \frac{u}{1+4} + \frac{u^2}{1+8} \ldots \qquad a_k = \frac{1}{1+2^k}$

$-2 \leq x^5 \leq 2$

$-\sqrt[5]{2} \leq x \leq \sqrt[5]{2}$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)} * (x_0)}{k!} * (x - x_0)^k \qquad a_k$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\text{¥}} \frac{1}{k!} * x^k \qquad \text{für jedes } x \in R$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\text{¥}} \frac{(-1)^k}{(2*k)!} * x^{2*k} \qquad \text{für jedes } x \in R$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\text{¥}} \frac{(-1)^k * x^{k+1}}{k+1} \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\text{¥}} \frac{(-1)^k}{(2*k+1)!} * x^{2*k+1} \qquad \text{für jedes } x \in R$$

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\text{¥}} \frac{(-1)^k}{(2*k+1)} * x^{2*k+1} \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\text{¥}} x^k \qquad \text{für } x \in (-1,1)$$

Achtung:

Es ist legitim, falls k erst von der 2. Partialsumme passt:

irgendwas $+\sum_{k=1}^{\infty}$ **Term**

Man bestimme die Anzahl der Summmanden, die nötig sind,

um die Grenzfunktion f(x) von $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-2)^k}{k}$ **im Intervall (1.5, 2.5) auf**

zwei Nachkommastellen genau zu approximieren (0,01).

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-2)^k}{k}=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{(x-2)^k}{k}\left(\text{N-te Partialsumme}\right)+\sum_{k=N}^{\infty}\frac{(x-2)^k}{k}\left(\text{Rest } R_N\right)$$

Gesucht N, Rest R_N **so, dass** $R_N<\varepsilon=0.001$ **bim Intervall(a,b)=(1.5 , 2.5)**

$$b_k=\frac{(x-2)^k}{k}\qquad \frac{b_{k+1}}{b_k}=\frac{\frac{(x-2)^{k+1}}{k+1}}{\frac{(x-2)^k}{k}}=\frac{k}{k+1}*(x-2)$$

$$b_{k+1}=\frac{k}{k+1}*(x-2)*b_k$$

$$\frac{k}{k+1}<1,\qquad (x-2)<0.5\qquad \text{bei Höchstwerten!}\quad \text{für } x\in[1.5,\ 2.5]$$

$$|b_{k+1}|\le 0.5*|b_k|$$

$$|b_{k+3}|\le 0.5*|b_{k+2}|\le 0.5^3*|b_k|$$

$$|b_{k+j}|\le 0.5^j*|b_k|$$

$$R_N=\left|\sum_{k=N}^{\infty}b_k\right|\le\sum_{k=N}^{\infty}|b_k|$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}|b_{N+j}|\le\sum_{j=0}^{\infty}0.5^j*|b_n|$$

$$=|b_n|*\sum_{j=0}^{\infty}0.5^j\qquad \text{(genaue Reihe)}$$

$$=|b_n|*\frac{1}{1-0.5}=|b_n|*2$$

$$|R_N|\le|b_n|*2=2*\frac{|x-2|^N}{N}\le 2*\frac{0.5^N}{N}<\varepsilon$$

$$2*\frac{0.5^N}{N}=0.01\qquad\qquad N=5.25$$

Grundform geometrischen Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a * q^k$$

Grundform Potenzreihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k * (x - x_0)^k \qquad x_2 \text{ ist Enwicklungspunkt}$$

$$a_0, a_1 \ldots . a_n \text{ sind Koeffizienten}$$

Grundform Funktionsreihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a * x^k \qquad q \text{ ist variabel} = x$$

$$\int \frac{\sin(x)}{x} * dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2*k+1)!} * \int_a^x x^{2k} dx =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2*k+1)!} * \frac{x^{2*k+1}}{2*k+1} \Big|_a^x - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2*k+1)!} * \frac{a^{2*k+1}}{2*k+1} \Big|_a^x =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2*k+1)!} * \frac{x^{2*k+1}}{2*k+1} \Big|_a^x + C$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - \cos(x)}{x * \sin(x)}$$

$$\cos(2*x) = 1 - \frac{(2*x)^2}{2!} + \frac{(2*x)^4}{4!} - \ldots .$$

$$1 - \cos(2*x) = \frac{(2*x)^2}{2!} - \frac{(2*x)^4}{4!} + \ldots .$$

$$x * \sin(x) = x^2 - \frac{x^4}{\square!} + \frac{x^{\square}}{\square!} \ldots .$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1 - \cos(x)}{x * \sin(x)} = \frac{\frac{(2*x)^2}{2!} - \frac{(2*x)^4}{4!} + \ldots .}{x^2 - \frac{x^4}{\square!} + \frac{x^{\square}}{\square!} \ldots} = \frac{2 - \ldots .}{1 - \ldots .} = 2$$

Man bestimme die Anzahl der Summanden, die nötig sind, um die Grenzfunktion f(x) von ln(1+x) im Intervall(-0.5, 0.5) auf <10⁻⁵ genau zu approximieren.

$$\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}*x^{k+1} + \sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}*x^{k+1} \quad \left(<10^{-5}\right)$$

$$|b_k| = \frac{|x|^{k+1}}{k+1}$$

$$|b_{k+1}| = \frac{|x|^{k+2}}{k+2} = \frac{|x|^{k+1}}{k+1}*|x|\frac{k+1}{k+2} \leq |b_k|*|x| \leq 0.5*|b_k|$$

$$|b_{k+2}| \leq |b_{k+1}|*0.5 \leq |b_k|*0.5^2$$

$$|b_{k+j}| \leq |bn|*0,5^j$$

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}*x^{k+1} \leq |bn|*\sum_{j=0}^{\infty}0,5^j = |bn|*2 \qquad 2=\frac{a}{1-q}$$

$$2*|bn| \leq 10^{-5}$$

$$2*\frac{0,5^{n+1}}{n+1} \leq 10^{-5}$$ --------□ertetab elle erstellen

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int \sin^{2*k}(t)*dt = \int\left[\sum_{k=0}^{\infty}\sin^{2*k}(t)\right]*dt$$

$\sum$ und $\int$ **vertauschen immer gestattet!**

$$\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}*\left(-t^2\right)^k\right)dt$$

= **Potenzreihen dürfen Summandenweise integriert werden.**

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}*(-1)^k*\int_0^x t^{2*k}*dt$$

Fourier-Reihen:

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k * (x - x_0)^k$ **im Konvergenzintervall** $(x_0 - r, x_0 + r)$

In der Naähe des Entwicklungspunktes kann f(x) schon durch eien Partialsumme mit wenigen Summanden gut angenähert werden.

Innerhalb eines vorgegeben Intervalls soll die Näherungsfunktion die gegebene Funktion f(x) überall ungefähr gleich gut approximiert sein.

Das Mass für eine gute Approximation f(x) und g(x) ist das Abstandsquadrat:

Unter dem Abstandsquadrat zweier Funktionen f(x) und g(x), welche im Intervall (a, b) definiert sind, verstehen wir das Integral:

$$\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)^2 * dx$$

f(x) und g(x) heissen orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt Null ergibt.

Auf dem Intervall (0,T) mit $\omega = \frac{2 * \pi}{T}$ **paarweise orthogonal:**

$1, \cos(\omega * t), \cos(2 * \omega * t), ...$

$\sin(\omega * t), \sin(2 * \omega * t), ...$

Eine Funktion g aus V ist zerlegbar nach $f_i \quad i = 1, 2, 3, 4........$ **wenn gilt:**

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(g, f_i)}{(f_i, f_i)} * f_i$$

Ein Vektorraum sit eine Menge V on Elementen, die man zueinender addieren und die man mit einer Zahl multiplizieren kann.

x,y,z $\in$ **des Vektorrames**

a,b reelle Zahlen

1. $(x+y)+z=x+(y+z)$
2. $x+y=y+x$
3. **Element 0 in V, so dass gilt** $x+0=x$
4. **Element** $-x$ **in V, so dass gilt** $x+(-x)=0$
5. $a*(b*x)=(a*b)*x$
6. $1*x=x$
7. $a*(x+y)=a*x+a*y$
8. $(a+b)*x=a*x+b*x$

Skalarprodukt zweier Funktionen:

$$(f_1,f_2)=\int_a^b f_1(x)*f_2(x)*dx$$

$$(f_1,f_2)=(f_2,f_1)$$

$$(f_1+f_2,f_3)=(f_1,f_3)+(f_2,f_3)$$

$$(a*f_1,f_2)=a*(f_1,f_2)$$

Die Reihe heisst trigonometrische Reihe:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k * \cos(k*\omega*t)+b_k * \sin(k*\omega*t)$$

für eine Funktion $f(t)$ mit der periode T und $\omega=\frac{2*\pi}{T}$ heissen reelle Fourier-koeffizienten a_k und b_k sind Koiffizienten der Fourierreihe:

$$a_k=\frac{2}{T}*\int_0^T f(t)*\cos(k*\omega*t)*dt \qquad k \geq 0$$

$$b_k=\frac{2}{T}*\int_0^T f(t)*\sin(k*\omega*t)*dt \qquad k \geq 1$$

$$a_0=\frac{2}{T}*\int_0^T f(t)*dt$$

Fourierreihe:

$$S_f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k * \cos(k*\omega*t)+b_k * \sin(k*\omega*t)$$

Integralform ausgedrückt duchrch Summe:

$$\int_a^b f(t)*dt$$

$$\approx \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)*\Delta t$$

komplexe Fourrier ausgedrückt duch Summe:

$$\frac{1}{T}*\int_0^T f(t)*e^{-i*k*\omega*t}*dt$$

$$\approx \sum f(t_k)*e^{-i*k*\omega*t_k}*\Delta t$$

Dirichelet - Bedingung:

Ist eine T-periodische Funktion $f(t)$ auf dem Intervall $\left[0,T\right]$ stückweise stetig differenzierbar, so gilt für die Fourier-Reihe $S_f(t)$:

-ist f auf dem Teilintervall [a,b] stetig, so konvergiert die S_f auf $[a,b]$ gegen f.

-ist t_0 eine Sprungstelle von f, so gilt:

$$S_f(t_0) = \frac{1}{2} * \left(\lim_{f \to t_0^+} f(t) + \lim_{f \to t_0^-} f(t) \right)$$

das heisst, $S_f(t_0)$ ist in der Mitte der Sprungstellen

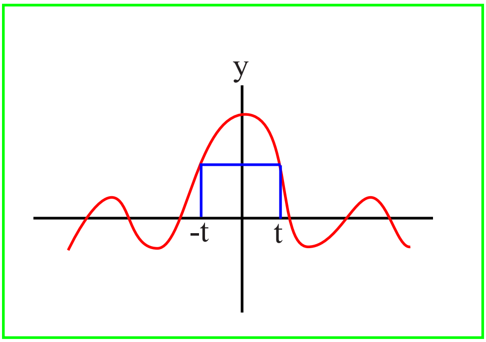
Symmetrie:

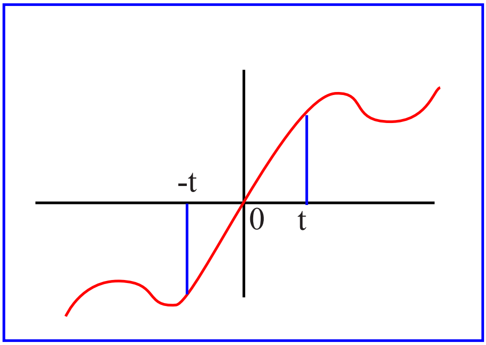
Für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten gilt:

-anstelle der Periode [0,T] kann [a,a+T] als Intervall verwendet werden

-für Funktionen $f(t) = -f(-t)$ gilt $a_k = 0$

-für Funktionen $f(t) = f(-t)$ gilt $b_k = 0$





Komplexe Fourier Darstellung :

$$\cos(x) = \frac{1}{2} * \left(e^{i*x} + e^{-i*x}\right)$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2*i} * \left(e^{i*x} + e^{-i*x}\right)$$

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k * \frac{1}{2} * \left(e^{i*k*w*t} + e^{-i*k*w*t}\right) + b_k * \frac{1}{2*i} * \left(e^{i*k*w*t} + e^{-i*k*w*t}\right)\right)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k * e^{i*k*w*t} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{n=-n}^{n} c_k * e^{i*k*w*t}\right) =$$

$$\frac{a_0}{2} + \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{n}\left(a_k * \cos(k*w*t) + b_k * \sin(k*w*t)\right)\right]$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

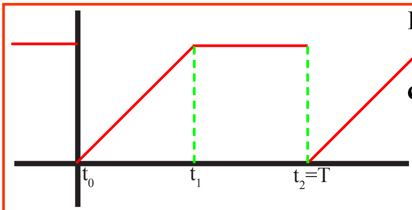
$$c_k = \frac{1}{2} * (a_k - i * b_k)$$

$$c_{-k} = \overline{c_k} = \frac{1}{2} * \left(a_k + i * b_k\right)$$

Die Zahlen $c_k = \frac{1}{T} * \int_0^T f(t) * e^{i*k*w*t} * dt$ **mit** $k \in Z$ **heissen komplexe Fourierkoiffizienten von f(t)**

Die komplexe Fourierreihe :

$$\frac{a_0}{2} * \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k * e^{i*k*w*t}$$



Integralbildung :

$$c_k = \frac{1}{T} * \left(\int_{t_0}^{t_1} f(t) * e^{-i*k*\omega*t} * dt + \int_{t_1}^{t_2=T} f(t) * e^{-i*k*\omega*t} * dt\right)$$