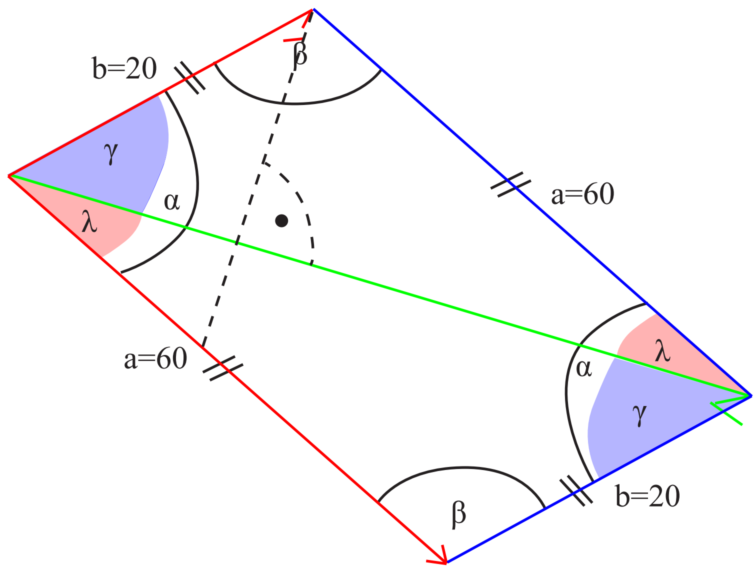
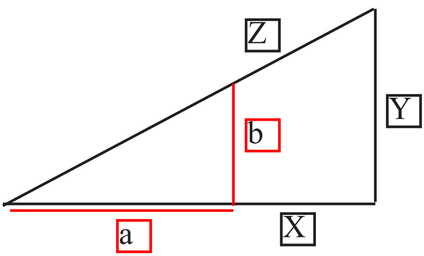
Kräfteparallelogramm:

Die beiden nicht in gleicher Richtung wirkenden Kräfte teilen sich auf.
Die beiden Kräfte werden parallel veschoben , bis die ein Kräfteparallelogramm bilden.
Die Winkel teilen sich wie ersichtlich auf.
Es ergibt sich die resultierende KRAFT



$$\boxed{F_{res} = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2} + 2 * F_1 * F_2 * \cos(\alpha)}}$$



$$\frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

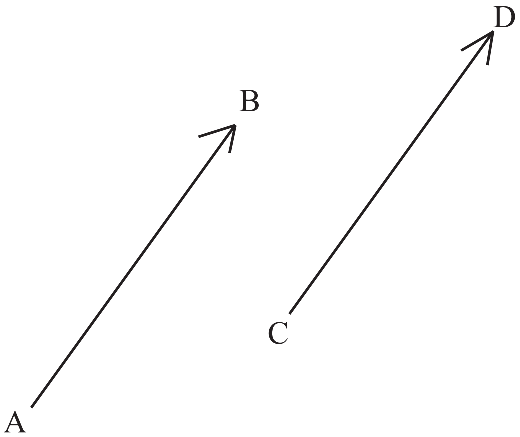
$$\textbf{Steigung} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Drehvektor = Schraube rechte Hand $V_1 \times V_2$

$$\frac{a}{b} = \frac{X}{Y}$$

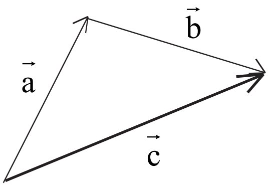
$$Z^2 = X^2 + Y^2$$

Allgemeines:



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\vec{a} + \vec{b} = \boxed{\text{Summenvector}}$



Additionsgesetze:

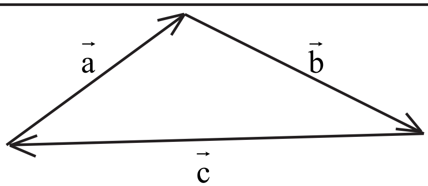
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{c} + \vec{b} + \vec{a}$

$-\vec{a}$ ist Gegenvektor von $\vec{a}$

$\vec{a}$ = Vektor

$|\vec{a}|$ = Zahl, Betrag eines Vektors, egal welche Richtung

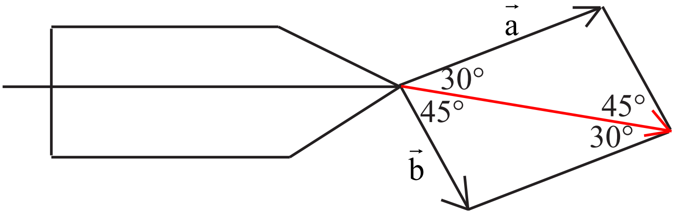


$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$

Der Vektor, der durch einen Pfeil mit demselben **A**nfangs und Endpunkt dargestellt wird, heisst Nullvektor.

Bezeichnung $\vec{0}$

Kräfteaufteilung / Kräfteparallelogramm:



$$\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = \frac{\sin 45°}{\sin 30°} \qquad |\vec{b}| = \frac{|\vec{a}| * \sin 30°}{\sin 45°}$$

Vektorsubtraktion:

Gegenvektor addieren

Vektor zur Spitze - Vektor zum Anfang.

$$|\vec{a}| = 5$$

$$\frac{\vec{a}}{5} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{|\vec{a}|} * \vec{a}$$

Jeder Vektor mit der Länge 1 heisst Einheitsvektor.

$$\square * \vec{a} + \square * \vec{a} = (\square * \square) * \vec{a}$$

$$\square * \vec{a} + \square * \vec{b} = \square * (\vec{a} + \vec{b})$$

$$\square * (\square * \vec{a}) = (\square * \square) * \vec{a}$$

Richtung und Betrag:

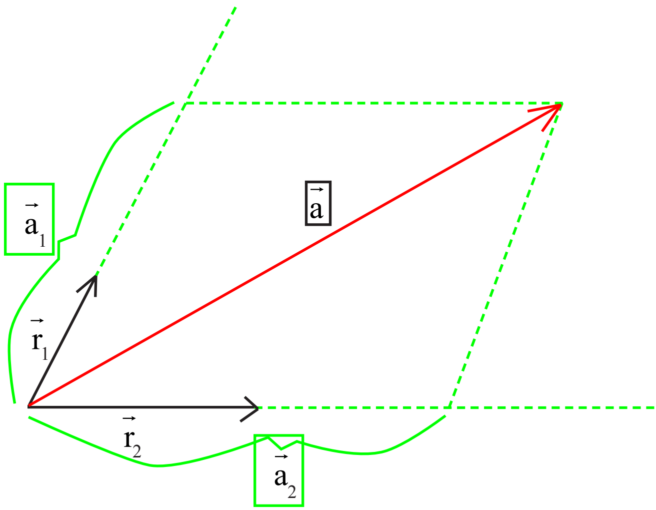
Bestimme den Betrag zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den Vektor, der die Richtung von $\vec{b}$ und den betrag von $\vec{a}$ hat.

$$\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} * \vec{b}$$

Richtungeines Vektors:

$$\boxed{\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} * \text{neuerBetrag}}$$

Komponenten:



Komponenten Von $\boxed{\vec{a}}$ bezüglich der Richtung $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$.

$$\boxed{\vec{a} = \underbrace{\square_1 * \vec{r}_1}_{\vec{a}_1} + \underbrace{\square_2 * \vec{r}_2}_{\vec{a}_2}}$$

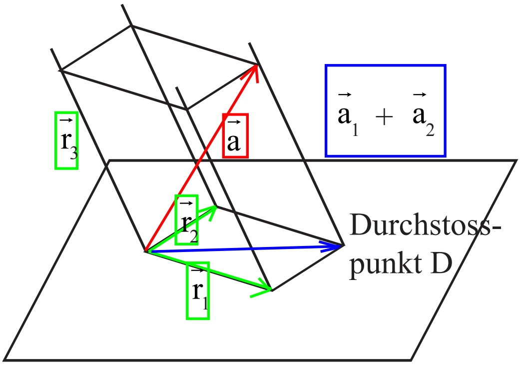
Linearkombination:

$$\vec{x} = \lambda_1 * \vec{a} + \lambda_2 * \vec{b} + \lambda_3 * \vec{c}$$

$\vec{x}$ = Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

$\lambda \geq 0$ = Richtung vom Vektor

$\lambda \leq 0$ = Richtung vom Vektor



$$\vec{a}_1 + \vec{a}_1 = \square_1 * \vec{r}_1 + \square_2 * \vec{r}_2$$

$$\vec{a} = \square_1 * \vec{r}_1 + \square_2 * \vec{r}_2 + \square_3 * \vec{r}_3$$

Man projiziert den gegebenen Vektor parallel zu r_3 auf die Ebene, die von r_1 und r_2 aufgespannt ist.

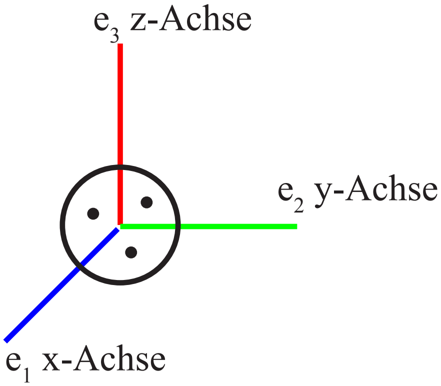
Jeder Vektor a der Ebene lässt scih eindeutig als Linearkombination zweier beliebiger, nicht parallelen Vektoren r_1, r_2 der Ebene darstellen:

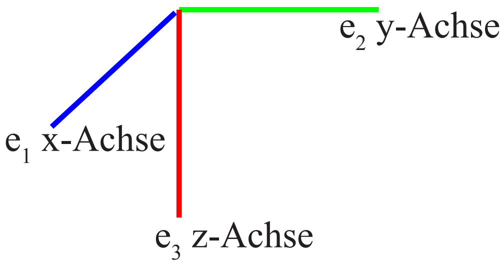
$$\vec{a} = \square_1 * \vec{r}_1 + \square_2 * \vec{r}_2$$

Jeder Vektor a des Raumes lässt sich eindeutig als Linearkombination dreier, nicht in einer Ebene liegende Vektoren r_1, r_2, r_3 des Raumes darstellen:

$$\vec{a} = \square_1 * \vec{r}_1 + \square_2 * \vec{r}_2 + \square_3 * \vec{r}_3$$

Recht (Kartesisches) und Linkssystem:





Rechtssystem:

in der Mathematik üblich Kartesisches system mit drei paarweise normal (90°) stehenden Einheits-vektoren.

e_1 e_2 e_3

Spaltendarstellung oder Kordinatendarstellung:

Linkssystem:

$$\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \vec{V}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{Allgemein}=\begin{pmatrix}x \ \text{Kordinate}\\y \ \text{Kordinate}\\z \ \text{Kordinate}\end{pmatrix}$$

Vektoraddition:

$$\vec{x}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 * \vec{e_1} + x_2 * \vec{e_2} + x_3 * \vec{e_3}$$

$$\vec{y}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = y_1 * \vec{e_1} + y_2 * \vec{e_2} + y_3 * \vec{e_3}$$

$$\begin{aligned} \vec{x} + \vec{y} &= x_1 * \vec{e_1} + x_2 * \vec{e_2} + x_3 * \vec{e_3} + y_1 * \vec{e_1} + y_2 * \vec{e_2} + y_3 * \vec{e_3} \\ &= (x_1 + y_1) * \vec{e_1} + (x_2 + y_2) * \vec{e_2} + (x_3 + y_3) * \vec{e_3} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

Vektorsubtraktion:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ x_3 - y_3 \end{pmatrix}}$$

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar (Zahl) auch (S-Multiplikation):

$$\begin{aligned} \lambda * \vec{x} &= \lambda * (x_1 * \vec{e_1} + x_2 * \vec{e_2} + x_3 * \vec{e_3}) \\ &= (\lambda * x_1) * \vec{e_1} + (\lambda * x_2) * \vec{e_2} + (\lambda * x_3) * \vec{e_3} \end{aligned}$$

$$\lambda * x = \lambda * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda * x_1 \\ \lambda * x_2 \\ \lambda * x_2 \end{pmatrix}$$

Gleichheitsgesetz:

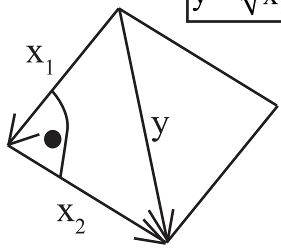
Zwie Vektoren des Raumes sind genau gleich, wenn ihre kordinaten gleich sind:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{matrix}$$

Betrag eines Vektors:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$y = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}}$$



$$\left(\text{Pythagoras:}\quad a^2 + b^2 = c^2\right)$$

$$|x| = \sqrt{\left(\sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}}\right)^2 + x_3^{\,2}}$$

$$|x| = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2}}$$

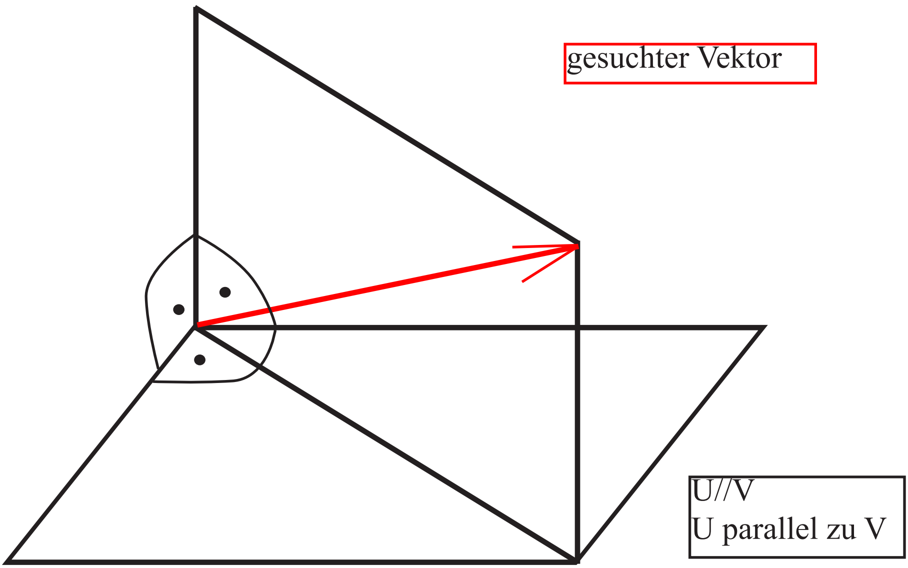
Lösungsweg für geometrische Raumaufgaben:

1. Skizze erstellen (nicht massstäblich)
2. Alle vorkommenden geometrischen Aussagen in algebraische übersetzen.
3. Aus 1. und 2. ergeben sich Unbekannte und Gleichungen
4. Gleichungen oder Gleichungssystem lösen

Punkt im Raum:

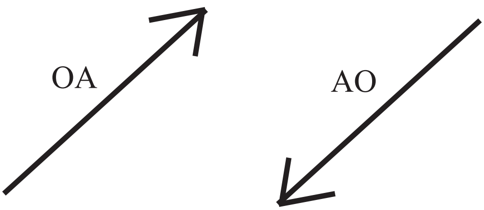
Ein Punkt ist fest im Raum A (2 / 3 / 5).

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\7\\5\end{pmatrix}$ ist ein Vektor, der Pfeil darf beliebig verschoben werden.
Ein Vektor steht für unendlich viele Pfeile gleicher Länge und gleicher Richtung im Raum.



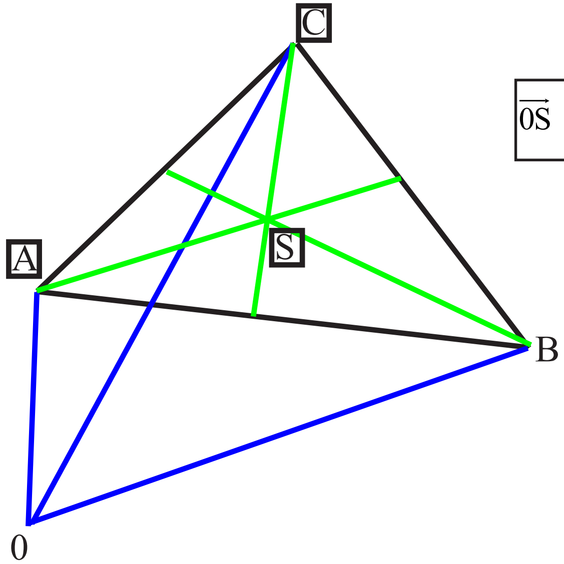
Gegenvektor:

Beim Gegenvektor ändern sich einfach die Vorzeichen der Kordinaten.



$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\-7\\5\end{pmatrix} \quad \text{Gegenvektor}\,\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix}-2\\7\\-5\end{pmatrix}$$

Schwerlinie, Schwerpunkt im allgemeinen Dreieck:



$$\overrightarrow{0S} = \frac{1}{3} * \overrightarrow{0A} + \frac{1}{3} * \overrightarrow{0B} + \frac{1}{3} * 0C$$

Von zwei Punkten den Vektor bestimmen:

$$A\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} 18 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \text{Spitze minus Anfang} =$$

$$\begin{pmatrix} 18 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 - 12 \\ 5 - 8 \\ 3 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Taschenrechner:

Vectoreingabe: [x; y; z]

Betrag errechnen: Catalog / norm([x; y; z])
Achtung bei solve(norm([x; y; z]) = norm([x; y; z]) ,x)

Skalarvektorprodukt: Catalog / dotP([x; y; z] , [x; y; z])

Wichtiges:

$$\frac{\text{Vektor}}{\text{Betrag des Vektors}} = \text{Einheitsvektor (Betrag1 und die Richtung)}$$

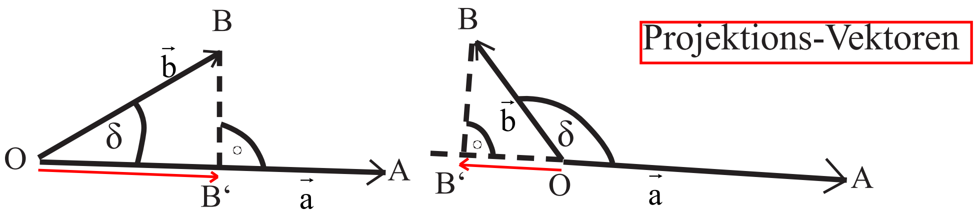
$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$\vec{a} \circ \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Bestimme den Betrag zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ den Vektor, der die Richtung von $\vec{b}$ und den betrag von $\vec{a}$ hat.

$$\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} * \vec{b}$$

Das Skalarprodukt (ist immer eine Zahl):



spitz stumpf

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist die Zahl (der Skalar):

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos\delta$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 * y_1 + x_2 * y_2 + x_3 * y_3 = \begin{pmatrix} x_1 * y_1 \\ x_2 * y_2 \\ x_3 * y_3 \end{pmatrix}$$

positiv, wenn ´ $< 90°$
negativ, wenn $\delta > 90°$
null, wenn $\delta = 90°$
cos(0)=1

$a * b = b * a$	Kommunikativgesetz
a*(b*c)=(a*b)*c	Assoziativgesetz
a*(b+c)=a*b+a*c	Distributivgesetz

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$$

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \circ \vec{c}) \square (\vec{a} \circ \vec{b}) \circ \vec{c}$$

$$\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$$

$$\square * (\vec{a} \circ \vec{b}) = (\square * \vec{a}) \circ \vec{b} = \vec{a} \circ (\square * \vec{b})$$

$\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ dann $\vec{a} \square \vec{b}$

$$\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

Die Projektionsformel:

Herleitung:

spitzer Winkel:

$$\frac{\left|\overrightarrow{OB'}\right|}{\left|\overrightarrow{OB}\right|} = \cos d$$

$$\left|\overrightarrow{OB'}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| * \cos d$$

stumpfer Winkel:

$$\frac{\left|\overrightarrow{OB'}\right|}{\left|\overrightarrow{OB}\right|} = \cos(180 - d) = -\cos d$$

$$\left|\overrightarrow{OB'}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| * (-\cos d)$$

$* \dfrac{\overrightarrow{OA}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|}$ **ergibt Richtung des Einheitsvektors in $\overrightarrow{OA}$ Richtung**

$$\overrightarrow{OB'} = \frac{\left|\overrightarrow{OB}\right| * \cos d}{\left|\overrightarrow{OA}\right|} * \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OB'} = \frac{\left|\overrightarrow{OB}\right| * (-\cos d)}{-\left|\overrightarrow{OA}\right|} * \overrightarrow{OA}$$

erweitern mit $\left|\overrightarrow{OA}\right|$

$$\overrightarrow{OB'} = \frac{\left|\overrightarrow{OB}\right| * \cos d * \left|\overrightarrow{OA}\right|}{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2} * \overrightarrow{OA}$$

Skalarprodukt

$$\overrightarrow{OB'} = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2} * \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \left|\vec{a}\right| * \left|\vec{b}\right| * \cos\square$$

$$\cos\square = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| * \left|\vec{b}\right|}$$

Projektionsformel (b_a =Projektionsvektor)

entspricht dem roten Vektor $\overrightarrow{OB'}$

$$b_a = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|^2} * \vec{a}$$

Spezialfälle:

a°a = |a| * |a| = $|a|^2$, da cos(0)=1

a°b = |a| * |b| , da cos(0)=1

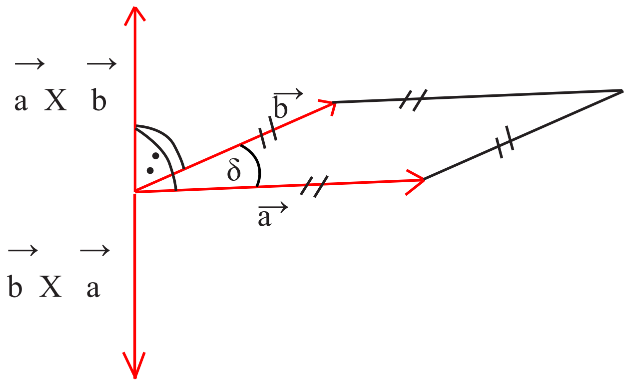
Das Vektorprodukt oder Kreuzprodukt (ist immer ein Vektor):

es gibt folgende Produkte bei Vektoren:

Skalarprodukt   a ° b
Vektorprodukt   a x b
Spatprodukt   (a x b) ° c Kombination aus Skalarprodukt und Spatprodukt

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \sin\delta}$$

Das Vektorprodukt a x b zweier Vektoren ist der Betrag von a * dem Betrag von b mal dem Sinus des Zwischenwinkels von a und b.
Die Richtung des so erhaltenen Vektors ist normal, also 90° zu der von a und b aufgespannten Ebene, so Dass a, b und axb in dieser Rheinefolge ein Rechtsystem bilden.
Der so erhaltene Vektor hat einen Betrag, der den Betrag der Fläche hat, die durch a und b aufgezogen ist. Seien Richtung ist im 90° Winkel zur von a und b aufgespannten Ebene.



Achtung:
Immer im Rechtssystem bleiben!!!!!!!
1.Vektor (Daumen) x 2.Vektor (Zeigefinger).

$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$ $\quad \vec{a} \times \vec{b}$ **bilden in der Reihenfolge ein Rechtssystem.**

D Z

$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$ $\quad \vec{b} \times \vec{a}$ **in der Reihenfolge im Rechtssystem,**

zeigt $\vec{b} \times \vec{a}$ nach unten.

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \neq \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Reihenfolge einhalten!!!!

$$\lambda * \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\lambda * \vec{a}\right) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda * \vec{b}\right)$$

$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}$ **und** $\vec{b}$ **sind parallel**

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0$$

TR: crossP([1;2;3],[4;5;6])

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 * y_3 - x_3 * y_2 \\ -(x_3 * y_1 - x_1 * y_3) \\ x_1 * y_2 - x_2 * y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \boxed{x_2 * y_3} - \boxed{x_3 * y_2} \quad = 1.\text{Kordinate}$$

$$-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = -(\boxed{x_1 * y_3} - \boxed{x_3 * y_1}) = 2.\text{Kordinate}$$

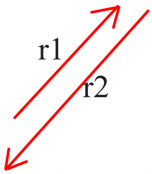
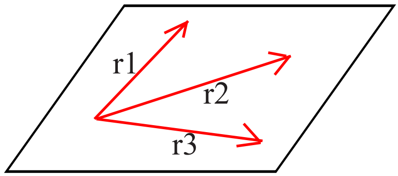
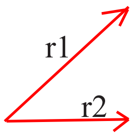
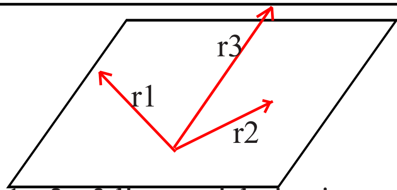
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \boxed{x_1 * y_2} - \boxed{x_2 * y_1} \quad = 3.\text{Kordinate}$$

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \text{Determinate}$$

Haupdiagonale $x_2 * y_3$

Nebendiagonale $x_3 * y_2$

Lineare Abhängigkeit: Achtung TR liefert nur die Triviallösung

	2 Vektoren	3 Vektoren
linear abhängig	 -r1 und r2 snd parallel. (auch Gegenrichtung ist möglich) -Sie können auf eine Linie gebracht werden.	 -Alle drei Vektoren liegen in einer Ebene. -Zwei der drei Vektoren sind parallel. -Alle drei Vektoren sind parallel.
linear unabhängig	 -Die Vektoren sind nicht parallel. -Sie spannen Fläche auf.	 -r1, r2, r3 liegen nicht in einer Ebene oder auf einer Geraden -Sie spannen Raum auf.

Zahl1*Vektor1 + Zahl2*Vektor2 + ... = 0

die Vektoren $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots, r_n$ heissen linear abhängig, wenn gilt:
Es gibt Zahlen $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots.., \rho_n$, die nicht alle Null sind, so dass

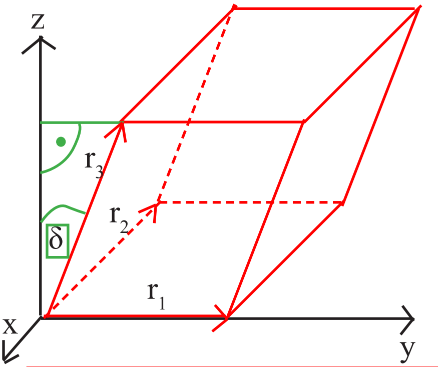
$$\rho_1 * r_1 + \rho_2 * r_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \rho_n * r_n = 0$$

die Vektoren $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots, r_n$ heissen linear unabhängig, wenn gilt:
die Gleichung $\rho_1 * r_1 + \rho_2 * r_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \rho_n * r_n = 0$ hat nur die Lösung
$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \ldots. = \rho_n = 0$ $\rightarrow$ Triviallösung

Das Spatprodukt:

-ist der Betrag des Volumens
-Zur überprüfung, ob drei Vektoren linear unabhängig sind.
-Ein Kombination von Skalar und Vektorprodukt
-spannt Raum auf

Drei lineare unabhängige Vektoren spannen einen Körper auf mit einem gewissen Volumen auf (Spat, Parallelflach oder Prisma).
Rutscht der dritte Vektor in die Ebene der von den zwei ersten Vektoren aufge-



Das Spatprodukt ist dann 0, wenn die Vektoren linear abhängig sind.

Das Vorzeichen ist +, wenn die Faktoren ein Rechtssystem bilden und -, wenn sie ein Linkssystem bilden.

Das Spatprodukt ändert sein Vorzeichen bei Vertauschung zweier Faktoren.

Herleitung :

Grundfläche : $\vec{r_1}\ x\ \vec{r_2}$

falls δspitz □ 90°

$$\frac{h}{|\vec{r_3}|} = \cos\delta$$

$$h = |\vec{r_3}| * \cos\delta$$

$$V = \left(|\vec{r_1}\ x\ \vec{r_2}|\right) * |\vec{r_3}| * \cos\delta$$ Ist ein Skalarprodukt

falls δstumpf $\delta > 90°$ $\delta < 180°$

$$V = □ \left(|\vec{r_1}\ x\ \vec{r_2}|\right) * |\vec{r_3}| * \cos\delta$$ Ist ein Skalarprodukt

Spatprodukt : $\pm \left(|\vec{r_1}\ x\ \vec{r_2}|\right) \circ |\vec{r_3}|$

$$\left(\beta * \vec{a}\ \mathrm{x}\ \gamma * \vec{b}\right) \circ \delta * \vec{c} = \beta * \gamma * \delta * \left(\vec{a}\ \mathrm{x}\ \vec{b}\right) \circ \vec{c}$$

Rechenregeln:

$$\left(\vec{r_1}\ x\ \vec{r_2}\right) \circ \vec{r_3} = \vec{r_1} \circ \left(\vec{r_2}\ x\ \vec{r_3}\right)$$ man darf die Zeichen tauschen

$$\left(\vec{r_1}\ x\ \vec{r_2}\right) \circ \vec{r_3} = - \left(\vec{r_2}\ x\ \vec{r_1}\right) \circ \vec{r_3} = - \left(\vec{r_3}\ x\ \vec{r_2}\right) \circ \vec{r_1}$$

Vertausschen zweier Vektoren aus einem Rechtssystem ein Linkssystem ergibt

Wert der Determinante=Betrag des Spatprodukts:

$$r1=\begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{pmatrix} \quad r2=\begin{pmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{pmatrix} \quad r3=\begin{pmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \\ r_{31} & r_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad\qquad + \quad + \quad +$$

Diagonalen multiplizieren und + bzw. - rechnen.

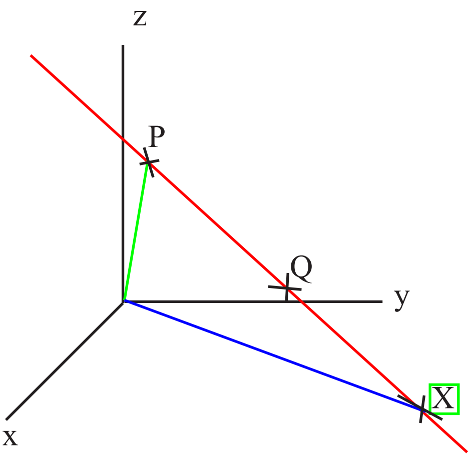
TR: det([r_{11},r_{12},r_{13} ; r_{21},r_{22},r_{23} ; r_{31},r_{32},r_{33}])

Formel für das Volumen eines Tetraeders:
=1/6 * Spatprodukt

Höhe eines Tetraeders:
=3*Volumen / Grundfläche

Ortsvektoren und Geraden:

Ein Ortsvektor ist ein Vektor, der nicht verschoben werden darf.
Auch gebundener Vektor genannt (im Gegensatz zum freien Vektor).
Spurpunkte = Durchstosspunkte (die eine Ebene durchstossen)
Schnittgerade = Summe von allen Schnittpunkten zwei sich schneidenden Geraden.



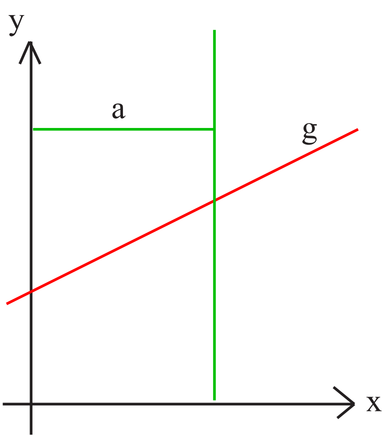
$\overrightarrow{OP}$ ist der Vekt
Behandlung wi

Geradengleichung:

$$\vec{X} = \vec{P} + \lambda * \overrightarrow{PQ}$$

$\overrightarrow{OP}$ ist der Vektor, für den ein Pfeil von O nach A geht; $\vec{P}$ ist der Ortsvektor.
Behandlung wie ein fester Punkt!!!!

Normalgleichung einer Geraden in einer Eben der Vektoren e1, e2 oder e3:



$$\vec{X} = \vec{P} + \lambda * \vec{r}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} r1 \\ r2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Idee } \lambda \text{ eliminieren}$$

$$\left| \begin{matrix} x=p1+\lambda*r1 \\ y=p2+\lambda*r2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} *r2 \\ *r1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x*r2=p1*r2+\lambda*r1*r2 \\ x*r1=p2*r1+\lambda*r1*r2 \end{matrix} \quad -$$

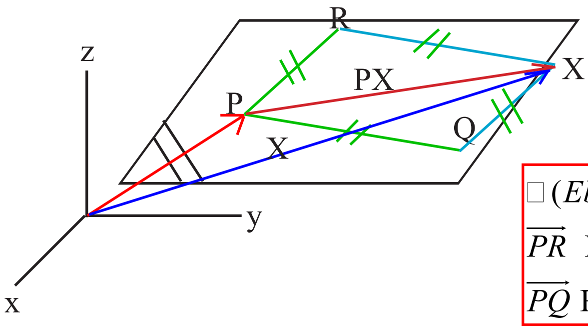
x*r2-y*r1=p1*r2-p2*r1

$\boxed{= \ x*a + y*b = c}$

<u>Ebene Ω:</u>

Eine Ebene ist eindeutig bestimmt wenn folgendes bekannt ist:
-drei Punkte
-ein Punkt und eine Gerade
-zwei sich schneidende Geraden
-zwei parallele Geraden

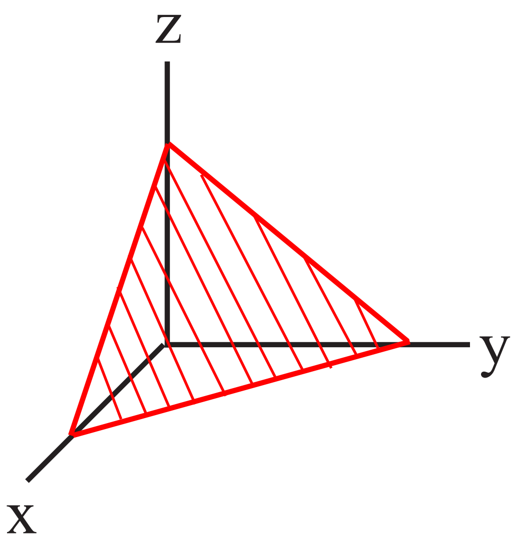
Startpunkt (Aufhängepunkt) und zwei Richtungsvektoren



$\square\ (Ebene) \; = \quad \vec{X} = \overrightarrow{OP} + \lambda * \overrightarrow{PR} + \mu * \overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{PR}$ Richtungsvektor 1

$\overrightarrow{PQ}$ Richtungsvektor 2



Normalgleichung einer Ebene:

Spurpunkte = Durchstosspunkte (die eine Ebene durchstossen)
Schnittgerade = Summe von allen Schnittpunkten zwei sich schneidenden Geraden.
1. Spur: Vector in der Grundrissebene x-y Ebene
2. Spur: Vector in der Aufrissebene y-z Ebene
3. Spur: Vector in der Seitenrisseben x-z Ebene
Spurgerade: Die Menge der Durchstosspunkte von einer Eben in xy, yz, zy, xy Ebene.

$$W : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + l * \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + m * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

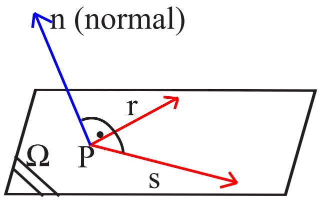
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + l * \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + m * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{c} x = 2 * m \\ y = 2 * l \\ z = 5 - l - 3 * m \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} m = \frac{x}{z} \\ l = \frac{y}{2} \end{array} \right|$$

$$\square = 5 - \frac{y}{2} - \frac{3 * x}{2} \qquad |*2|$$

Normalgleichung: $2 * z + y + 2z - 10 = 0$

Ein Punkt liegt genau dann in einer Ebene, wenn seine Koordinaten die Normalgleichung dieser Ebene erfüllen.
Normalgleichung:

$$a*x + b*y + c*z + d = 0$$

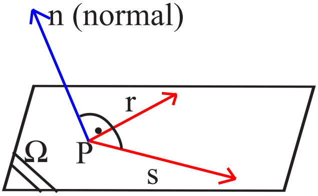


$$\vec{X} = \vec{P} + \lambda * \vec{r} + \mu * \vec{s} \quad \Rightarrow \quad a*x + b*y + c*z + d = 0$$

1) $\vec{n} = \begin{pmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{pmatrix} = \vec{r} \text{ x } \vec{s} \quad \Rightarrow \quad a = n1 \quad b = n2 \quad c = n3$ [aus dem Kreuzprodukt]

2) $d = -\left(\vec{n} \circ \vec{P}\right)$

von der Parameterdarsstellung → Normalgleichung:



$$\vec{X} = \vec{P} + \lambda * \vec{r} + \mu * \vec{s} \quad \Rightarrow \quad a*x + b*y + c*z + d = 0$$

1) $\vec{n} = \begin{pmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{pmatrix} = \vec{r} \text{ x } \vec{s} \quad \Rightarrow \quad a = n1 \quad b = n2 \quad c = n3$ [aus dem Kreuzprodukt]

2) $d = -\left(\vec{n} \circ \vec{P}\right)$

von der Normalgleichung → Parameterdarstellung:

$a*x + b*y + c*z + d = 0$ Jeder Punkt mit den Kordinaten (x|y|z) der die Gleichung erfüllt, liegt in dieser Ebene.

Wir müssen zwei Vektoren (Richtungsvektoren) finden, die senkrecht zum Normalenvektor stehen und linear unabhängig sind. Zusätzlich ist ein Punkt P zu finden, der in der Ebene liegt.

Wir suchen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ $\perp$ $\vec{n}$ und Punkt $\vec{P}$

$y = 0$ Geom. u // yz Ebene

$z = 0$ Geom. v// xz Ebene

$a*x + d = 0 \qquad x = \dfrac{-d}{a} \qquad a \neq 0$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \\ \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} \\ 0 \\ \\ \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \vec{u} \circ \vec{n} = 0 \\ \vec{v} \circ \vec{n} = 0 \end{matrix}$$

Beispiel :

$$5*x-3*y+4*z-1=0$$

$$y=z=0$$

$$5*x-1=0$$

$$x=\frac{1}{5}$$

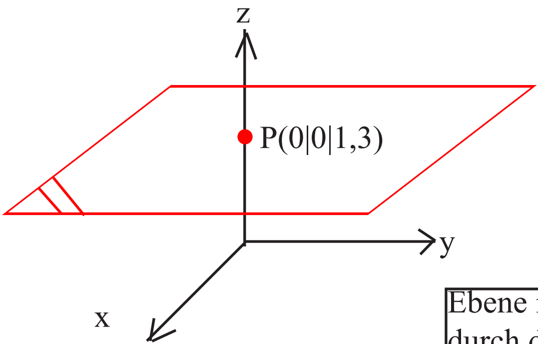
$$P\left(\frac{1}{5}\,|\,0\,|\,0\right)$$

Wenn d=0 geht die Eben durch den Kordinatennullpunkt.

$$\vec{n}=\begin{pmatrix}5\\-3\\4\end{pmatrix}\qquad \vec{u}\circ\vec{n}=0\qquad \vec{u}=\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}\qquad \vec{v}\circ\vec{n}=0\qquad \vec{v}=\begin{pmatrix}-4\\0\\5\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{X}=\begin{pmatrix}0.2\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda*\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}+\mu*\begin{pmatrix}-4\\0\\5\end{pmatrix}$$

<u>Besondere Lagen von Ebenen (einfach gebaut):</u>

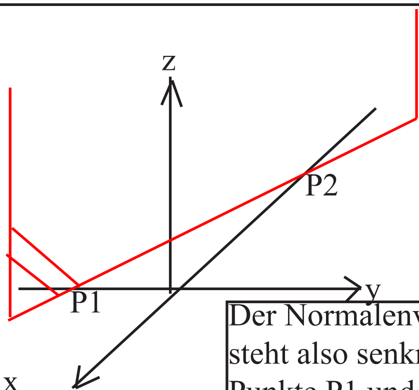


$$\boxed{3*z-4=0}$$

$$d=-4\qquad \vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$P\left(0|0|\frac{4}{3}\right)$$

Ebene ist parallel zur xy Ebene und geht durch den Punkt P



$$\boxed{2*x+3*y+6=0}$$

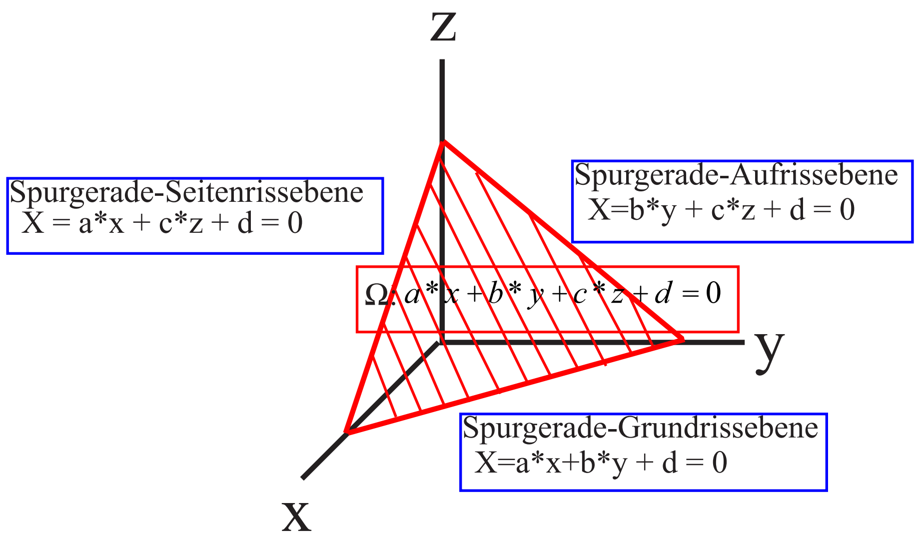
$$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$x=0\qquad y=-2\qquad P_1=(0\,|-2\,|\,0)$$

$$y=0\qquad x=-3\qquad P_2=(-3\,|\,0\,|\,0)$$

Der Normalenvektor liegt parallel zur xy Ebene. Die Ebene steht also senkrecht zur xy Ebene. Gerechnet über einfache Punkte P1 und P2.

Normalgleichung bei Ebenen und Geraden:



Die Geradengleichung ist auch für die Ebengleichung verwendbar.
Die Normalgleichung der Spurgeraden entspricht auch der Normalgleichung der Ebene. ein Parameter fehlt.

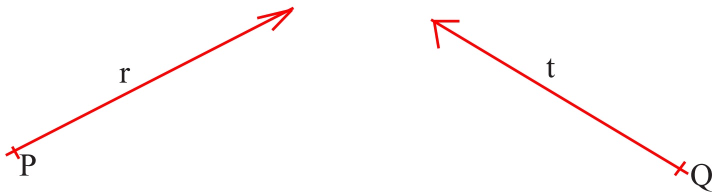
$$\vec{X} = \vec{P} + \lambda * \vec{r} + \mu * \vec{s} \quad \Rightarrow \quad a*x+b*y+c*z+d=0$$

1) $\vec{n} = \begin{pmatrix} n1 \\ n2 \\ n3 \end{pmatrix} = \vec{r} \text{ x } \vec{s} \quad \Rightarrow \quad a = n1 \quad b = n2 \quad c = n3$ [aus dem Kreuzprodukt]

2) $d = -\left(\vec{n} \circ \vec{P}\right)$

x = X-Kordinaten
y = Y-Kordinaten
z = Z-Kordinaten

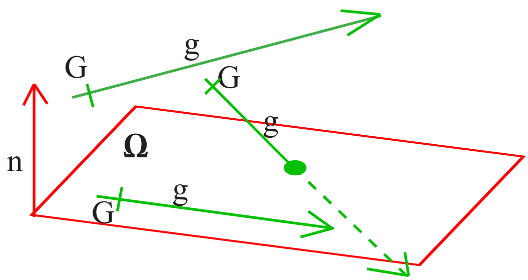
Geradenschnitte:



Geometrisch	vektoriell	algebraisch
g=h	r,t, PQ sind parallel, (Geraden liegen aufeinander)	hat ∞ Lösungen
g // h	r, t sind parallel, aber PQ nicht (Geraden sind parallel nebeneinander)	hat keine Lösung
{S}=g n h **Schnittpunkt**	r,t linear unabhängig, PQ ist Linear- kombination von r und t (Geraden schneiden sich in einem Punkt)	hat 1 Lösung
g, h windschief	r, t PQ sind linear unabhängig (Geraden sind irgendwo im Raum, und schneiden sich nicht)	keine Lösung

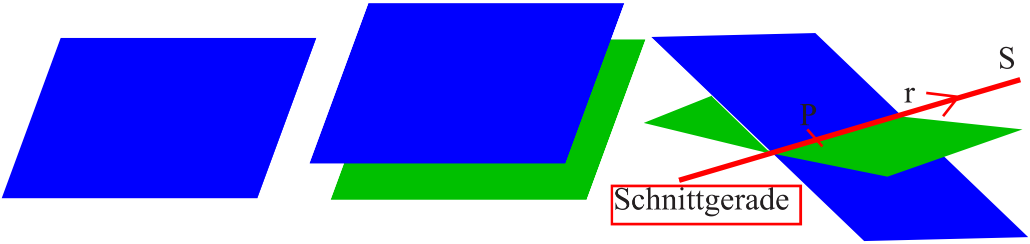
---

Geraden Ebenenschnitte:



Geometrisch	vektoriell	algebraisch
Ω Є g	g┴n und G Є Ω, g steht senkrecht zu n (Gerade befindet sich in der Ebene)	hat ∞ Lösungen
g // Ω	g┴n und G Є Ω (Gerade parallel zur Ebene)	hat keine Lösung
{S}=g n Ω **Schnittpunkt**	g°n ≠ 0 (Gerade durchstösst die Ebene)	hat 1 Lösung

Ebenenschnitte:



$n\Omega_1 // n\Omega_2$	$n\Omega_1 // n\Omega_2$	$n\Omega_1$, $n\Omega_2$ linear unabhängig.
hat viele Lösungen	Hat keine Lösungen	hat Lösungen
$ax + by\ cz + d = 0$ $ex + fy + gz + h = 0$		weiter: $r \perp n\Omega_1$ und $r \perp n\Omega_2$ $r = n\Omega_1 \times n\Omega_2$

Schnittgerade zweier Ebenen:

$$\vec{r} = \vec{n}\Omega_1\ x\ \vec{n}\Omega_2$$

$P:$

$$z = 0 \quad P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

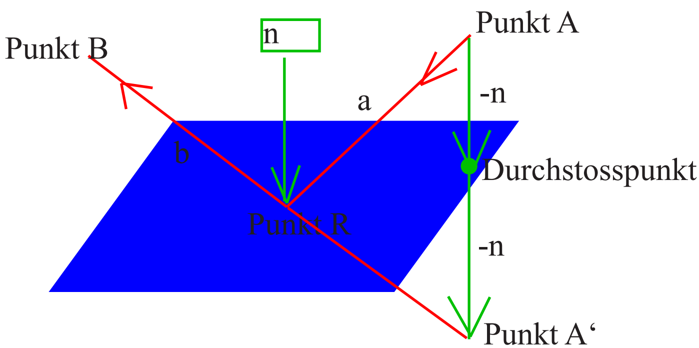
P in Normalgleichungen oder Parametergleichung von Ω_1 und Ω_2 einsetzen.

Gerade und Ebene:

$$Ebene:$$
$$\Omega: a*x+b*y+c*z+d=0$$
$$Gerade:$$
$$\overrightarrow{X}=\overrightarrow{R}+\lambda*\overrightarrow{r} \qquad \overrightarrow{R}=\begin{pmatrix}R_1\\R_2\\R_3\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{r}=\begin{pmatrix}r_1\\r_2\\r_3\end{pmatrix}$$
$$Gleichung:$$
$$a*(R_1+\lambda*r_1)+b*(R_2+\lambda*r_2)+c*(R_3+\lambda*r_3)+d=0$$

---

bei Spiegelungen an Ebene:



Punkt $\overrightarrow{A'}=\overrightarrow{A}+\left(2*\square\overrightarrow{n}\right)$

Gerade $b=\overrightarrow{R}+\lambda*\left(\overrightarrow{A'R}\right)$

metrische Probleme (Abstände, Winkel):

Abstände können berechnet werden zwischen:

-zwei Punkten (Entfernung)
-einem Punkt und einer Geraden
-einem Punkt und einer Ebene
-zwei Geraden (parallel oder Windschief)
-zwei parallelen Ebenen ---Abstand Punkt-Ebene

Winkel können berechnet werden zwischen:

-zwei Geraden
-einer Ebene und einer Geraden
-zwei Ebenen

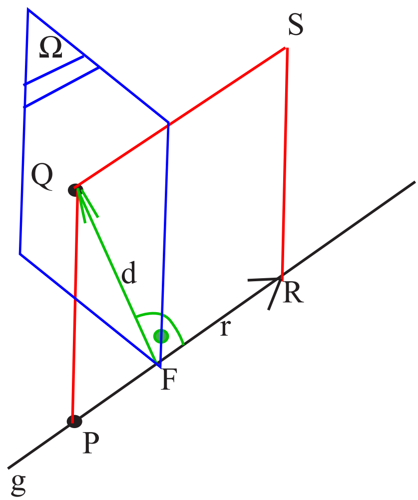
Abstand eines Punktes von einer Geraden:

Der Abstand d der Gerade g ist die Höhe des Parallelogramms PQRS.

$$d = \frac{\text{Parallelogrammfläche}}{\overrightarrow{\text{PR}}}$$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{PR}\ x\ \overrightarrow{\text{PQ}}\right|}{\left|\overrightarrow{\text{PR}}\right|}$$

$$d = \frac{\left|\vec{r}\ x\ \overrightarrow{PQ}\right|}{\left|\vec{r}\right|}$$



Bestimmung des Punktes F:

Eine Hilfsebene einrichten (normal zu g durch Q):

F ist Durchstosspunkt von g und □.

$\vec{\text{n}}$□ $=\vec{\text{r}}$

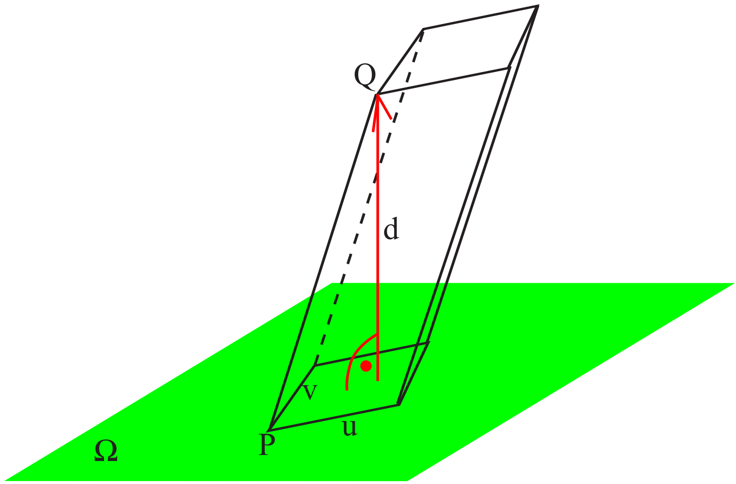
$d =$ □$\vec{\text{n}}$□ °Q Normalgleichung z.B $2 * x + y$ □ $71 = 0$

Normalgleichung mit den Unbekannten λ von der Geradengleichung übernehmen:

$2*(2*\lambda)+(10+\lambda)$ □ $(1$ □ $\lambda)$ □ $71 = 0$

λ Ausrechnen / $\lambda * \vec{r}$ ist Punkt F und Durchstosspunkt

Abstand eines Punktes von einer Ebene:



Der gesuchte Abstand d kann aufgefasst werden als Höhe des Spats (Prisma) der von $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{PQ}$ aufgespannt wird.

Kann also mit Spatvolumen und Grundfläche berechnet werden.

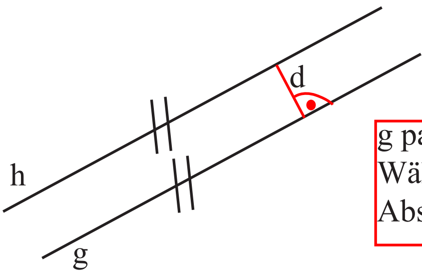
$$\boxed{d = \frac{Spatvolumen}{Grundfläche} = \frac{\left|(\vec{u}\ x\ \vec{v})\right| \circ \overrightarrow{PQ}}{\left|\vec{u}\ x\ \vec{v}\right|}}$$

Abstand zweier parallelen Geraden:

$g = h \quad \rightarrow$ zusammenfallend

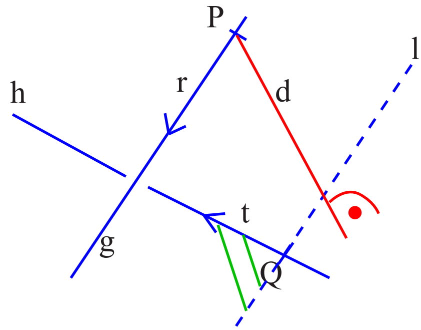
gÇ $(schnei\,$det$)\ h \quad \rightarrow$ g und h haben einen gemeinsamen Punkt

d=0



g parallel zu h
Wähle beliebigen Punkt Q auf g
Abstand d=Abstand Q zu h

Abstand zweier windschiefer Geraden:



verschiebe g parallel durch Q---> gerade l
Q ist Aufhängepunkt der ersten Geraden.
(Q ist ein Punkt auf h)
Ω ist die Ebene, die von h und l aufgespannt wird.
Abstand d = Abstand von P zu Ω
(Abstand Punkt Ebene)

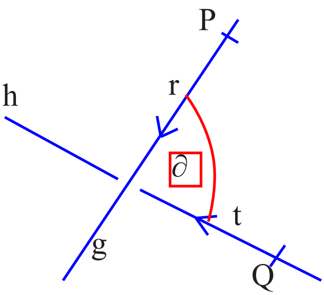
$$d = \frac{\text{Spatvolumen}}{\text{Grundfläche}} = \frac{\left|\left(\vec{r} \times \vec{t}\right) \circ \overrightarrow{QP}\right|}{\left|\vec{r} \times \vec{t}\right|}$$

Achtung bei Punkten mit dem kleinsten Abstand:

$$Q + \lambda * \vec{t} + \mu * \vec{n} = \beta * \vec{r}$$

$\vec{n}$ = Normalenvektor von $\vec{t} \times \vec{r}$

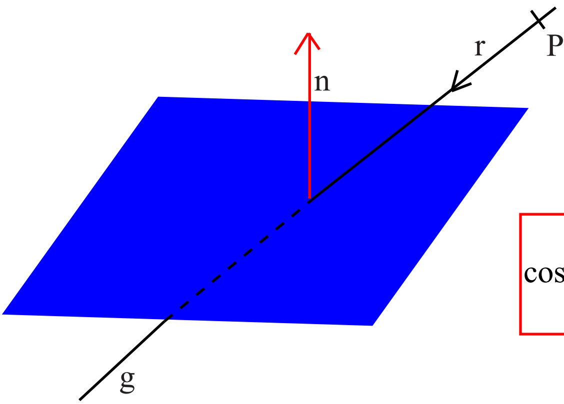
Winkel zweier Geraden (windschief oder schneidend):



$$\cos\delta = \frac{\left|\vec{r} \circ \vec{t}\right|}{\left|\vec{r}\right| * \left|\vec{t}\right|}$$

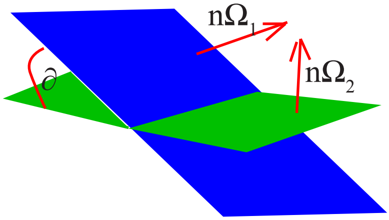
Zwischenwinkel bei zwei windschiefen Geraden:
Man verschiebt die eine Gerade parallel, bis sich ein Schnittpunkt ergibt.

Winkel zwischen Geraden und Ebene:



$$\cos(90^\circ \square \delta) = \sin\delta = \frac{\left|\vec{r} \circ \vec{n}\right|}{\left|\vec{r}\right| * \left|\vec{n}\right|}$$

Winkel zwischen zwei Ebenen:

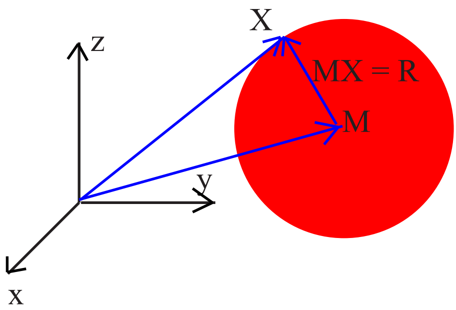


∂ ist der kleinere Winkel.
Der grössere errechnet sich 180° -∂.

δ ist der Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren.

$$\cos(\delta) = \frac{\left|\overrightarrow{n}_1 \circ \overrightarrow{n}_2\right|}{\left|\overrightarrow{n}_1\right| * \left|\overrightarrow{n}_2\right|}$$

Die Kugelformel:



Falls X auf der Kugel:

$$\overrightarrow{MX} = \vec{X} - \vec{M}$$

$$\left|\vec{X} - \vec{M}\right| = R$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{M} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} - \vec{M} = \overrightarrow{MX} = \begin{pmatrix} x-u \\ y-v \\ z-w \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MX} = R \quad \text{also} \quad \left(\vec{X}\text{-}\vec{M}\right)^2 = R^2$$

$$R^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2$$

Durchstosspunkt Gerade und Kugel:d

$$M = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{R=7} \quad \text{Gerade=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda * \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gleichung der Kugel:

$$49 = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2$$

Durchstosspunkte erfüllen die Gerade und die Kugelgleichung!!!

Achtung:
Eventuell Parametervergleich machen!!!!

Falls X nicht gewiss, ob auf der Kugel:

$$\left|\overrightarrow{MX}\right| \left|\begin{pmatrix} x-u \\ y-v \\ z-w \end{pmatrix}\right| < R^2 \quad \text{X befindet sich innerhalb Kugel}$$

$$\left|\overrightarrow{MX}\right| \left|\begin{pmatrix} x-u \\ y-v \\ z-w \end{pmatrix}\right| > R^2 \quad \text{X befindet sich ausserhalb Kugel}$$

$$\left|\overrightarrow{MX}\right| \left|\begin{pmatrix} x-u \\ y-v \\ z-w \end{pmatrix}\right| = R^2 \quad \text{X befindet sich auf Kugel}$$

Vectoranalysis:

$\mathbf{f(x,y)}$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ **heissen die partiellen Ableitungen von f(x,y)**

man schreibt auch fx, fy

$\mathbf{fxy = fyx}$

kritische Stellen:

$$f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$f'(y) = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Kandiaten (x_1, y_1) ....(x_n, y_n)**:**

bilde D(x,y) = fxx*fyy − (fxy)²

$D(x_k, y_k) > 0$ **Extremalstelle** $fxx(x_k, y_k) > 0$ **lokales Minimum**

$fxx(x_k, y_k) < 0$ **lokales Maximum**

$D(x_k, y_k) < 0$ **Sattel**

$[D(x_k, y_k) = 0$ **unbestimmt**$]$

Mathematica:

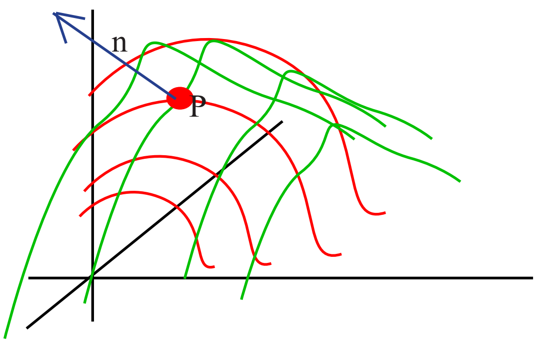
Plot 3D[Funktion, {x, .., ..}, {y, .., ..}, optionale Angaben]

optionale Angaben:

ViewPoint->{x,y,z}

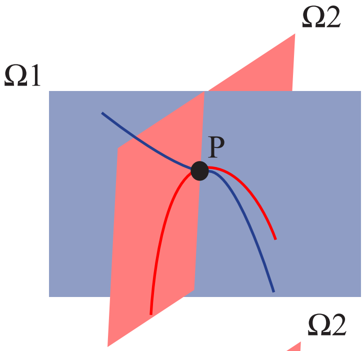
PlotRage->{}

BoxRatios->{x,y,z}



Ω1 ist Schnittebene zur y-z Ebene

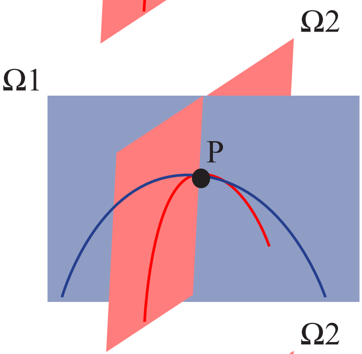
Ω2 ist Schnittebene zur x-z Ebene



P(u, v, f(u, v))

$$\frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(u,v) \neq 0$$

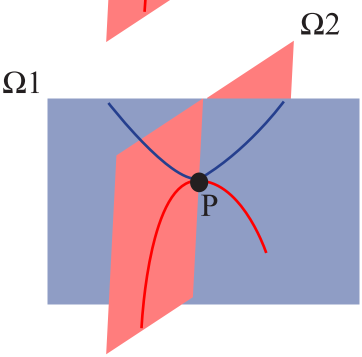
keine Extremalstelle



P(u, v, f(u, v))

$$\frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(u,v) = 0$$

lokales Maximum in P



P(u, v, f(u, v))

$$\frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(u,v) = 0$$

aber keine lokale Extremalstelle in (u,v)

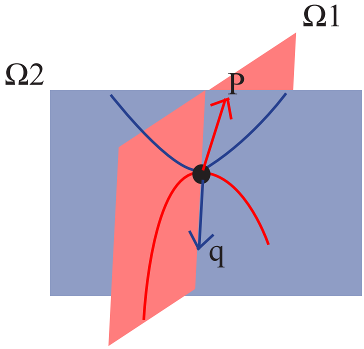
ist (u,v) eine loklae Extremalstelle, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = 0$$

ist $\frac{\partial f}{\partial x}(u,v) = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) = 0$ **so folgt nicht nachgewiesenerweise,**

dass dort eine lokale Extremalstelle ist.

Der Normalenvektor:



Idee: finde zwei Tangentialvektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$ der Fläche und bilde das Kreuzprodukt:

$$\vec{n} = \vec{p} x \vec{q}$$

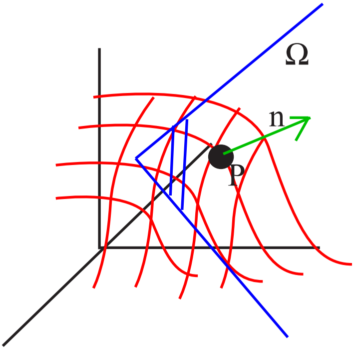
k1 und k2 sind Schnittkurven

wähle $\vec{p}$ als Tangentialvektor von k1 in P von Ω1

wähle $\vec{q}$ als Tangentialvektor von k2 in P von Ω2

$$k1 \;\; f(x,v) = p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(u,v) \end{pmatrix}$$

$$k2 \;\; f(y,v) = q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(u,v) \end{pmatrix}$$



Geo: Tangentialebene = Liniearisierung von f(x,y)

$\mathbf{P}(\mathbf{p_1 p_2 p_3})$

$$\vec{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \mathbf{n_1} \\ \mathbf{n_2} \\ \mathbf{n_3} \end{pmatrix}$$

Ebene aus Punkt + Normalenvektor:

$$\Omega : \mathbf{n_1 x + n_2 y + n_3 z - (\vec{n} \circ \vec{p}) = 0}$$

$$\Omega : \mathbf{n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) + n_3(z - p_3) = 0}$$

$\mathbf{P(u, v, f(u, v))}$ **ein Flächenpunkt**

$$\boxed{\textbf{Normalenvektor in (u,v)} = \vec{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \mathbf{fx(u,v)} \\ \mathbf{fy(u,v)} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}}$$

Tangentialebene:

$$\Omega : \mathbf{n_1(x - u) + n_2(y - v) + n_3(z - f(u, v)) = 0}$$

$$\Omega : \mathbf{n_1(x - u) + n_2(y - v) - n_3(z - f(u, v)) = 0}$$

$$\Omega : \mathbf{z = n_1(x - u) + n_2(y - v) + f(u, v)}$$

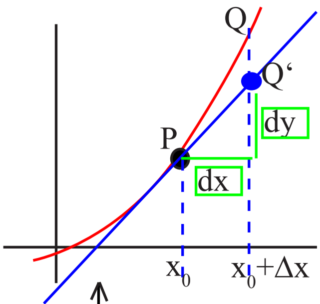
mit $\mathbf{n_1 = fx(u, v)}$ $\quad \mathbf{n_2 = fy(u, v)}$

$$\square : z = A(x \square u) + B(y \square v) + z_0$$

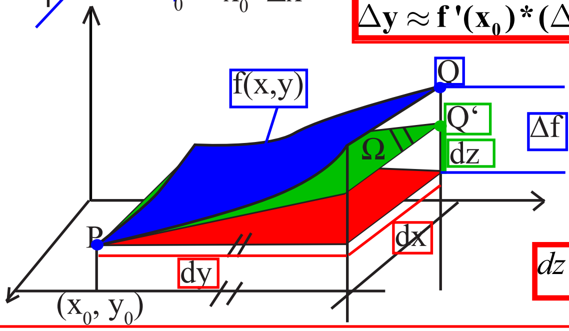
mit $A = fx(u,v) \quad B = fy(u,v) \quad z_0 = f(u,v)$

Ist f(x,y) in dieser Umgebung von (u,v) stetig differenzierbar, so existiert die Tangentialebene in (u, v, f(u,v))
Sie hat die Gleichung :

Das totale Differential:



$$Taylor1 = f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0)$$
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$
$$dy = f(x_0) * dx$$
$$f(x_0 + \Delta x) \approx T_1(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) * (\Delta x)$$
$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) * (\Delta x)$$
$$\boxed{\Delta y \approx f'(x_0) * (\Delta x)}$$



die Zahl dz ist das totale Differential

$$\boxed{dz = fx(x_0, y_0) * dx + fy(x_0, y_0) * dy}$$

(x_0, y_0) eine feste Stelle

$P(x_0, y_0, z_0)$ der punkt auf dem Graphen in (x_0, y_0)

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

Ω die Tangentialebene in P

Sei Q auch ein Punkt auf dem Graphe, aber nur geringfügig von P entfernt.

$$Q\left(x_0 + dx, y_0 + dy, z\right), \qquad z = f(x_0 + dx, y_0 + dy)$$

mit kleinem Wert für dx, dy.

Die exakte Differenz der Funktionswerte lautet:

$$\Delta f = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0)$$

Näherungswert dz für Δf:

Q'=Schnittpunkt des Lots von Q auf die xy Ebene mit Ω

$$Q' = \left(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz\right)$$
$$\Omega : z = A * (x - x_0) + B * (y - y_0) + z_0$$
$$A = fx(x_0, y_0) \quad B = fy(x_0, y_0)$$

Q' liegt auf Ω: $z_0 + dz = A * (x_0 + dx - x_0) + B * (y_0 + dy - y_0) + z_0$

Fehlerrechnung:

totales Differential bei n Variablen:

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x_1}*\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}*\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}*\Delta x_n$$

für Maximalfehler:

$$R_1=851,4\pm 0,5$$

$$R_2=252,1\pm 0,4$$

$$R=\frac{R_1*R_2}{R_1+R_2}$$

$$=R*R_1()*0,5+R*R_2()*0,4$$

$u=f(x_1,x_2,......,x_n)$ **eine Grösse, zusammengesetzt aus den Grössen** $x_1,x_2,......,x_n$

$\Delta x_1,\Delta x_2,......,\Delta x_n$ **Messfehler**

$\Delta u=$ **Maximalfehler der Grössen in:**

$$\Delta u\approx|du|=\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}*dx_1+........+\frac{\partial f}{\partial x_n}*dx_n\right|$$

$$\leq\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|*\Delta x_1+........+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|*\Delta x_n$$

$$\Delta u\leq\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|*\Delta x_1+........+\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|*\Delta x_n$$

Abschätzung des Fehlers Δu(bei zwei Unbekannten):

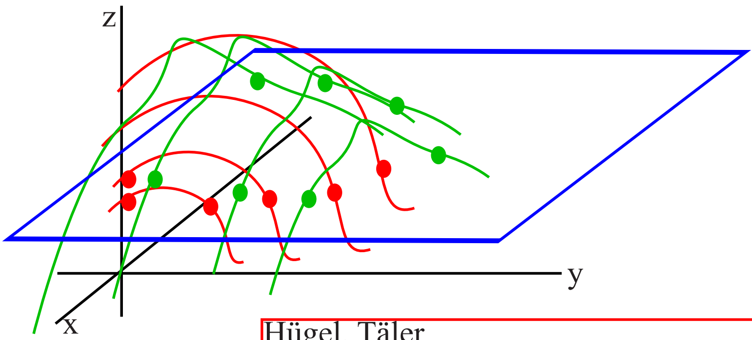
$$\Delta u\approx|du|=|fx(x,y)*dx+fy(x,y)*dy|$$

$$\Delta u\approx|du|=\leq|fx(x,y)*dx|+|fy(x,y)*dy|$$

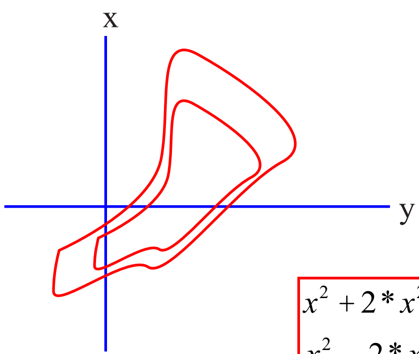
$$=|fx(x,y)|*|dx|+|fy(x,y)|*|dy|$$

$$\leq|fx(x,y)|*\Delta x+|fy(x,y)|*\Delta y$$

Die Niveaulinien (bzw. Höhenlinien):



Hügel, Täler
Orte mit gleichem Abstand über einer Ebene
Schnitt parallel zur xy Ebene
f(x,y) = C = konstant



$$x^2 + 2 * x^2 = c$$

$$\frac{x^2}{c} + \frac{2 * x^2}{c} = 1$$

= Ellipse mit den Halbachsen $a = \sqrt{c}, b = \sqrt{\frac{c}{2}}$

$$\cos\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = c$$

$$x^2 + y^2 = (Arc\cos(c))^2$$

= unendlich viele Kreise mit dem Zentrum Q und
Radius r=arccos(c)

Für c>1 existiert keine Niveaulinie

Funktionen mit mehreren Variablen:

Die partielle Ableitung:

sei $u = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$

$$\frac{\partial f}{x_1}, \frac{\partial f}{x_2}, \ldots\ldots\ldots, \frac{\partial f}{x_n}$$

$$\frac{\partial f}{x_k} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_k + h, x_{k+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{h}$$

die Niveaufläche:

Definition:
sei f(x,y,z) eine Funktion in 3 Variablen, dann heisst die Menge allse Raumpunkte (x,y,z) mit den Eigenschaften f(x,y,z) = c = konstant Niveaufläche von f.

Beispiel: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

eine Niveaufläche $f(x,y,z) = c$

$c < 0$ keine Niveaufläche

$c = 0$ Punkt(0,0,0)

$c > 0$ $x^2 + y^2 + z^2 = c$ Kugel mit Radius $\sqrt{c}$

Beispiel: $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 + y^2}{z}$

Niveaufläche dieses Skalarfeldes:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2}{z} = c$$

$$z = \frac{1}{c} * (x^2 + y^2)$$

$c \neq 0$ Paraboloid

$c = 0$ z-Achse ohne (0,0,0) $D=\mathbb{R}^3 \setminus \left(\left(x,y,z\right) : z = 0\right)$

Notation von Funktionen mit mehreren Variablen, :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1,..,\mathbf{x}_n) \to \mathbf{f}(\mathbf{x}_1,..,\mathbf{x}_n)$$

$$\mathbf{f}:\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (\mathbf{x}_1,..,\mathbf{x}_n) \to \mathbf{f}(\mathbf{x}_1,..,\mathbf{x}_n)$$

Bem. $\mathbb{R}$ **alle (reellen) Zahlen**

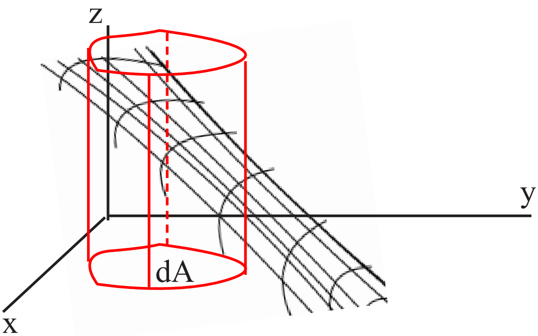
$\mathbb{R} * \mathbb{R} : \mathbb{R}^2$ **alle Zahlenpaare** $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$

$\mathbb{R} * \mathbb{R} * \mathbb{R} : \mathbb{R}^3$ **Zahlentrippel** $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ **= Skalarfeld**

$\mathbb{R} * \mathbb{R} * ..... * \mathbb{R} : \mathbb{R}^n$ **alle n-Tupel** $(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)$

Anwendungen:
-interpretiere t als Zeit
-jedem Raumpunkt wird die Temperatur T zugeordnet
-Skalarfeld
-Q Ladung im Raum

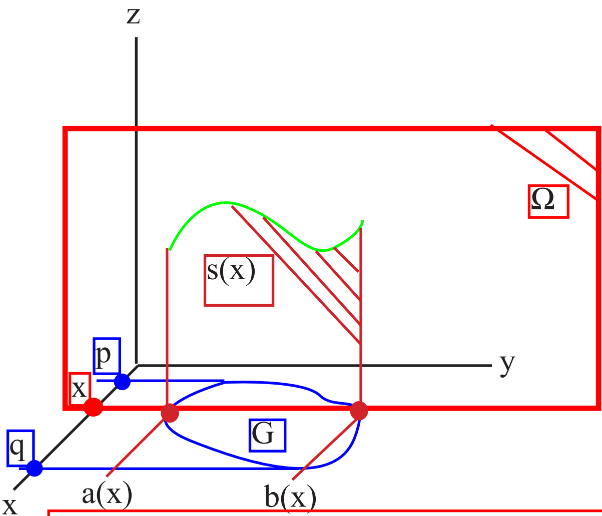
Das Doppelintegral (Volumen unter der Fläsche) :



Grundfläche Gebiet G

Zylinderförmiger Körper, begrenzt durch G und den Graphen **f**(x,y)
infinite semales Volumenelement:
dV=f(x,y)*dA
Volumen zwischen Gebiet und Fläche f(x,y)=Summe aller dV

$$= \int dV = \int f(x,y)dA = \int\int f(x,y)dy, dx$$



Schnitt parallel zur yz Ebene
Schnittfläche s(x)

Volumenelement dV=s(x)*dx

$$V=\int dV = \int s(x) * dx$$

a(x),b(x)	**y-Koordinaten der Schnittpunkte von Ω und dem Gebiet G.**
p,q	**kleinste bzw. grösste x-Koordinate eines Punktes auf dem Rand von G.**
s(x)	**Inhalt der Fläche zwischen der Schnittkurve und der x-y Ebene.**

$$s(x) = \int_{y=a(x)}^{y=b(x)} f(x,y)dy$$

Das Volumen:

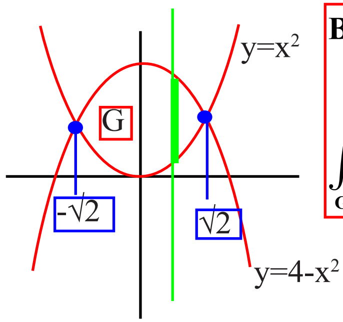
$$V = \int_{x=p}^{x=q} s(x)dx$$

damit:

$$V = \int_{x=p}^{x=q} \int_{y=a(x)}^{y=b(x)} f(x,y)dy,dx \qquad \text{also} \quad \int_G f(x,y)dA = \int_p^q \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)dy,dx$$

manchmal (Kreisgrundfläche $= \int_{a(x)}^{b(x)} \int_p^q f(x,y)dy,dx$

Notation von Funktionen mit mehreren Variablen, :



Beispiel : $f(y,x) = x^2(y-1)$

Gebiet G: berandet durch $y = x^2, y = 4 - x^2$

$$\int_G f(x,y)dA = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{4-x^2} x^2(y-1)dy, dx = \frac{32}{15} * \sqrt{2}$$

Beispiel : $f(x,y) = x * y$

Gebiet G : $y = x$ **und** $y = \sqrt{x}$

Schnitt parallel zur y-z Ebene:

$a(x) = x$

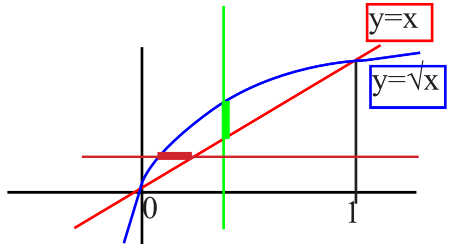
$b(x) = \sqrt{x}$

$p = 0$

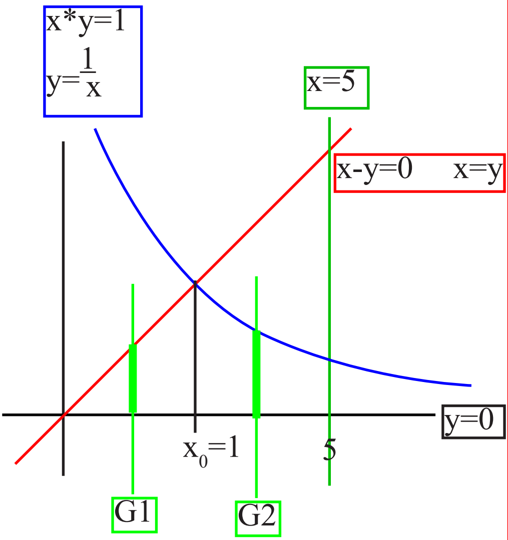
$q = 1$

Inhalt $s(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)dy = \int_{x}^{\sqrt{x}} x * y, dy$

$$\int_G f(x,y)dA = \int_p^q s(x)dx = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} x * y, dy, dx$$



$$\int_0^1 \int_{y^2}^{y} f(x,y) * dx * dy$$



$f(x,y) = x^2 - y^2$

Gebiet berandet durch :

$x - y = 0$ $\quad y = x$ **//45°**

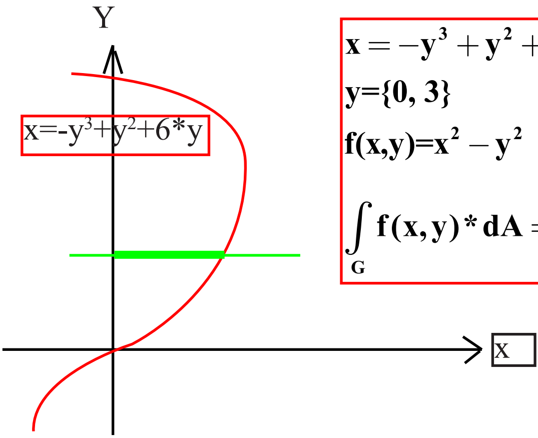
$x * y = 1$ $\quad y = \frac{1}{x}$ **//Hyperbel**

$y = 0$ **//X-Achse**

$x = 5$ **//senkrechte Linie**

$\int_G f(x,y)dA =$ G1 G2

$$\left(\int_0^1 \int_0^x x^2 - y^2 dy, dx\right) + \left(\int_1^5 \int_0^{\frac{1}{x}} x^2 - y^2 dy, dx\right)$$

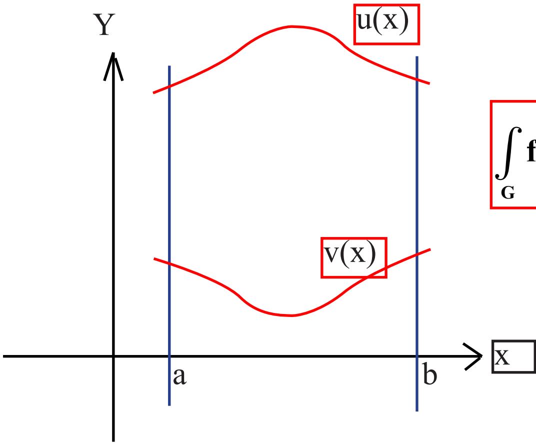


$$x = -y^3 + y^2 + 6 * y \ , \qquad x=0$$

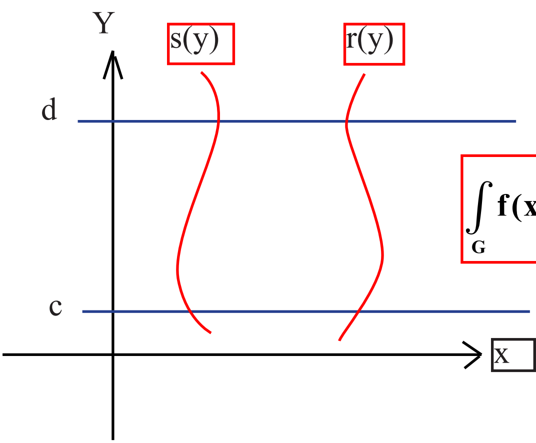
$$y=\{0,\ 3\}$$

$$f(x,y)=x^2 - y^2$$

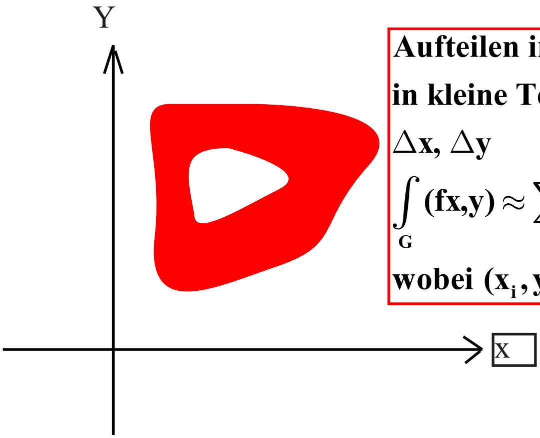
$$\int_G f(x,y) * dA = \int_{y=0}^{y=3} \int_{x=0}^{x=-y^3+y^2+6*y} x^2 - y^2 * dx * dy$$



$$\int_G f(x,y) * dA = \int_a^b \int_{v(x)}^{u(x)} f(x,y) * dy * dx$$



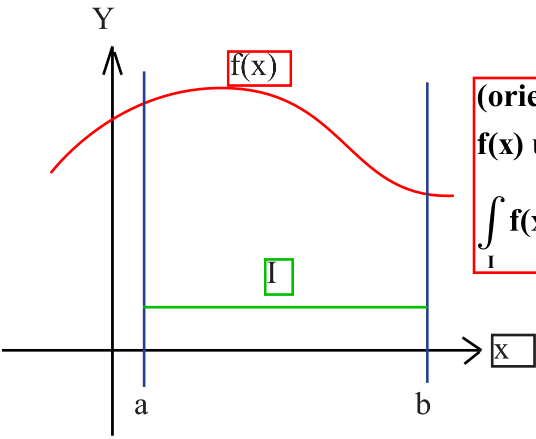
$$\int_G f(x,y) * dA = \int_c^d \int_{s(y)}^{r(y)} f(x,y) * dx * dy$$



Aufteilen in Normalbereiche, Oder unterteilen in kleine Techtecke mit den Seitenlängen: Δx, Δy

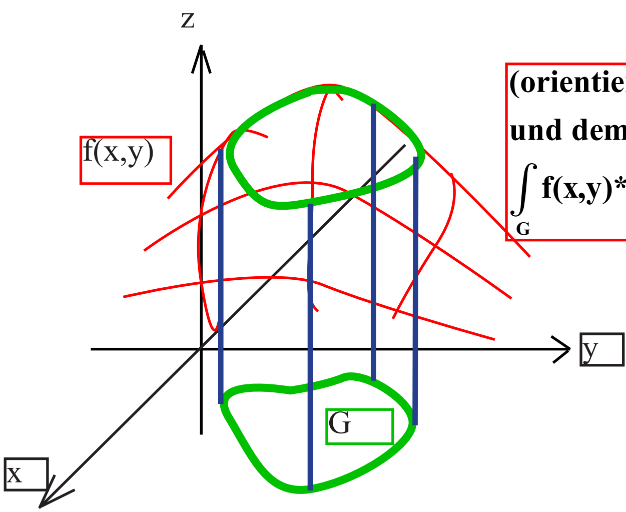
$$\int_G (fx,y) \approx \sum\sum f(x,y)*\Delta x*\Delta y$$

wobei (x_i, y_i) im Gebite G liegen muss



(orientierter) Inhalt zwischen f(x) und der x Achse zwischen a und b:

$$\int_I f(x)*dx = \int_a^b f(x)*dx$$



(orientiertes) Volumen zwischen f(x,y) und dem Gebiet G:

$$\int_G f(x,y)*dA$$

Der Schwerpunkt (SP):

Allgemeiner Schwerpunkt:

$$x = \frac{m_1 * x_1 + \ldots\ldots + m_n * x_n}{m_1 + \ldots\ldots + m_n}$$

$$\text{Masse } M = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M} * \sum_{k=1}^{n} m_k * x_k \qquad \bar{y} = \frac{1}{M} * \sum_{k=1}^{n} m_k * y_k \qquad \bar{z} = \frac{1}{M} * \sum_{k=1}^{n} m_k * z_k$$

$$\vec{r}_s = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \frac{1}{M} * \sum_{k=1}^{n} m_k * \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}$$

Körperschwerpunkt:

$$\text{Gesammtmasse: } M = \int_k dm$$

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_k x * dm$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \int_k y * dm$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \int_k z * dm$$

$$\text{Volumenschwerpunkt : } dm = dV = \int_k dV$$

$$\text{Schwerpunkt } \vec{r}_s = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \frac{1}{V} * \int_k \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} dV$$

Flächenschwerpunkt:

$$dm = dA \qquad M = A = \int_{\text{Gebiet}} dA$$

$$\bar{x} = \frac{1}{A} * \int_{\text{gebiet}} x * dA$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} * \int_{\text{gebiet}} y * dA$$

$$r_s = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{A} * \int_{\text{gebiet}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} dA$$

Flächenschwerpunkt:

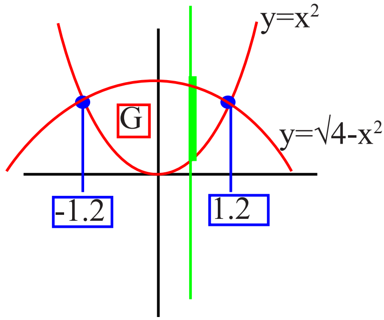
Symmetrie: $\bar{x} = 0$

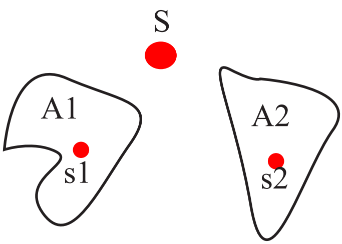
$$A = \int_{Gebiet} dA = \int_{-1,2}^{1,2} \int_{x^2}^{\sqrt{4-x^2}} 1 * dy * dx \qquad \left(= \frac{1}{A} * \int_{-1,2}^{1,2} \left(\sqrt{4-x^2}\right) - \left(x^2\right) dx \right)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} * \int_{Gebiet} y * dA$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} * \int_{-1,2}^{1,2} \int_{x^2}^{\sqrt{4-x^2}} y * dy * dx$$

$$\bar{x} = \frac{1}{A} * \int_{-1,2}^{1,2} \int_{x^2}^{\sqrt{4-x^2}} x * dy * dx$$





$A = A_1 + A_2 (+ ... + A_n)$

Schwerpunkte:

$S_1(x_1, y_1)$ von A_1

$S_2(x_2, y_2)$ von A_2

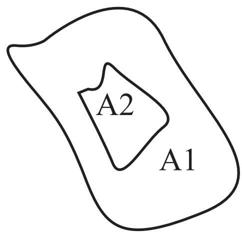
$S_n(x_n, y_n)$von A_n

Gesamtschwerpunk:

$S(\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{x} = \frac{1}{A} * (A_1 * x_1 + A_2 * x_2 + ... + A_n * x_n)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} * (A_1 * y_1 + A_2 * y_2 + ... + A_n * y_n)$$



$A_2 =$ **Fläche des Lochs**

$A =$ **Fläche des Rings=**

$A_1 - A_2 (- ... - A_n)$,

Schwerpunkte:

$S_1(x_1, y_1)$ von A_1

$S_2(x_2, y_2)$ von A_2

$S_n(x_n, y_n)$von A_n

Gesamtschwerpunkt:

$S(\bar{x}, \bar{y})$

$$\bar{x} = \frac{1}{A} * (A_1 * x_1 - A_2 * x_2 - ... - A_n * x_n)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A} * (A_1 * y_1 - A_2 * y_2 - ... - A_n * x_n)$$

Das Flächenträgheitsmoment (FTM):

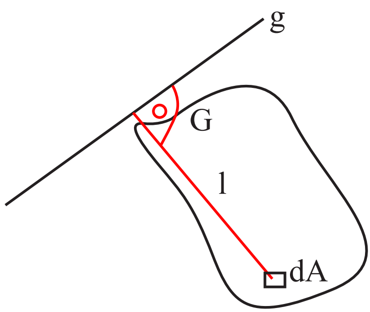
Elastizitätsmodul E : materialabhängig

Flächenträgheitsmoment I : Formabhängig

E*I =Steifigkeit "char. Grösse für die Durchbiegung"

Durchbiegung h= $\frac{l^3 * F}{3 * E * I}$

kritische Last= $\frac{4 * \pi^2 * E * I}{l^2}$



I=Flächenträheitsmoment FTM

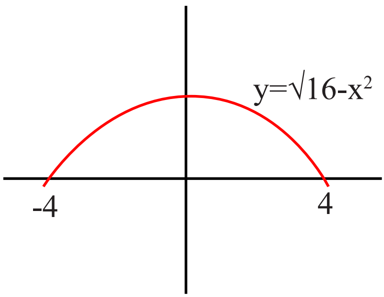
$$\mathbf{I = \int_G l^2 * dA}$$

$$\mathbf{dI = l^2 * dA}$$

$\mathbf{I_x}$ **= FTM bezgl. der X Achse**

$\mathbf{I_y}$ **= FTM bezgl. der Y Achse**

$$\mathbf{I_x = \int_G y^2 * dA \qquad I_y = \int_G x^2 * dA}$$



$$\mathbf{I_x = \int_G y^2 * dA \quad = \int_{-4}^{4} \int_{0}^{\sqrt{16-x^2}} y^2 * dy * dx}$$

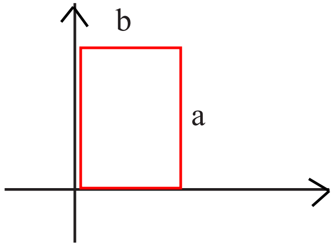
$$\mathbf{I_y = \int_G x^2 * dA \quad = \int_{-4}^{4} \int_{0}^{\sqrt{16-x^2}} x^2 * dy * dx}$$

$$\mathbf{I_x = I_{schwerpunkt} + d^2 * A}$$

$$\mathbf{I_{schwerpunkt} = I_x - d^2 * A}$$

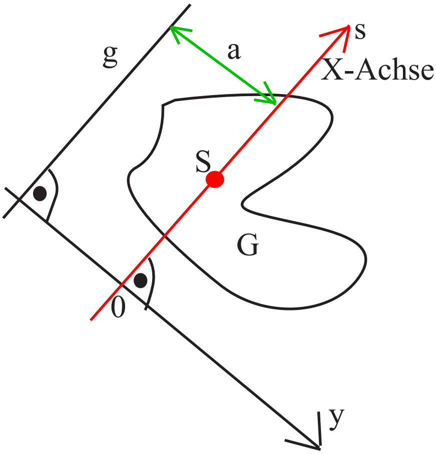
$$\mathbf{\bar{y} = \frac{1}{A} * \int_{-4}^{4} \int_{0}^{\sqrt{16-x^2}} y * dy * dx} \qquad \textbf{bei } \bar{\mathbf{x}}\textbf{: x}$$

$$\mathbf{I_y = \int_{-4}^{4} \int_{0}^{\sqrt{16-x^2}} x^2 * dy * dx} \qquad \textbf{bei } \bar{\mathbf{x}}\textbf{: } \mathbf{y^2}$$



$$I_x = \int_G y^2 * dA \quad = \int_0^b \int_0^a y^2 * dy * dx$$

Satz von Steiner:



Wenn x,y Kordinaten im Schwerpunkt liegt, sind die statischen Momente gleich null.

G = ein Gebiet

g = eine Gerade

A = Fläche von G

S = Schwerpunkt

s = parallele zu g durch S

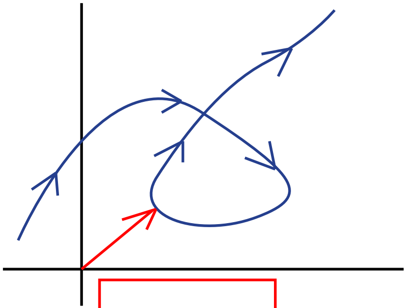
a = Abstand von s zu g

$$I_y = \int_G (a+y)^2 * dA = \left(a^2 * \int_G dA\right) + \left(2 * a * \int_G y * dA\right) + \left(\int_G y^2 * dA\right)$$

$$a^2 * A \qquad \boxed{2*a*A*\bar{y}} \qquad I_s (= I_x)$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_s(I_x) &= I_g - a^2 * A \quad \text{wobei } a^2 = \bar{y}^2 \\ I_s(I_x) &= I_x - \bar{y}^2 * A \end{aligned}}$$

Kurven in der Ebene:



$\bar{r}$ Ortsvektor

$\vec{r}$ **Ortsvektor**

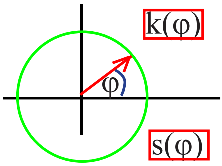
$\vec{r}(t)$ **r von Zeit t**

$$\vec{r}(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Beispiel:

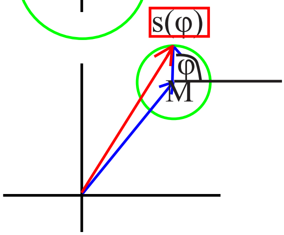
$$\vec{r}(\delta)=\begin{bmatrix} \sin(\delta) \\ \sin(\delta)*\cos(\delta) \end{bmatrix}$$

TI 89:
Mode -> Graph -> Parametric   Achtung nur t, x, y verwenden
Mathematica:
ParametricPlot[{x(t), y(t)},{t, min, max}]



$$k(\varphi)=\vec{r}*\begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

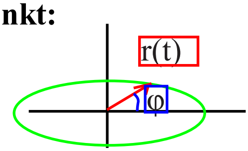
Achtung :
Startwerte dazuzählen



$$s(\varphi)=\overrightarrow{M}+\vec{r}*\begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

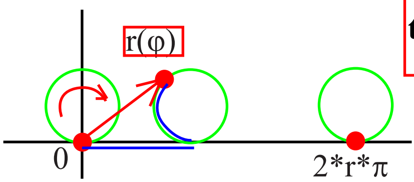
Falls M in Nullpunkt:

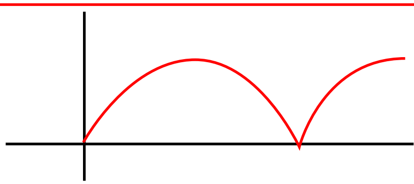
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$r(t)=\begin{bmatrix} a*\cos(t) \\ b*\sin(t) \end{bmatrix}$$

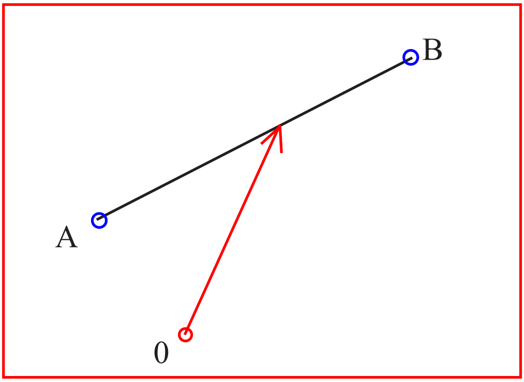
$$\tan(\varphi)=\frac{b*\sin(t)}{a*\cos(t)}=\frac{b}{a}*\tan(t) \quad \text{d.h } \varphi\neq t$$





$$r(\varphi)=\begin{bmatrix} r*\varphi-r*\sin(\varphi) \\ r-r*\cos(\varphi) \end{bmatrix}$$ **Dreieck!!!!**

Ergibt eine Kurve namens „Zykloide“

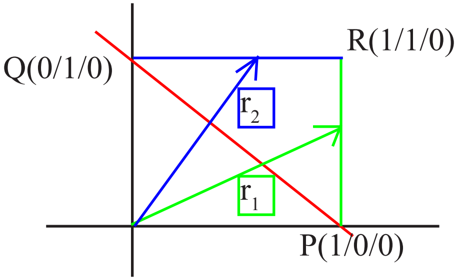


Allgemein:

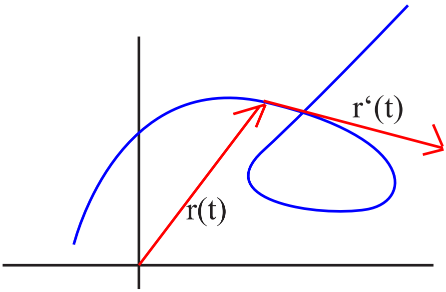
$\mathbf{r(t) = A + t * \overrightarrow{AB}}$

$$\mathbf{r_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 0 \le t \le 1}$$

$$\mathbf{r_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t * \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 0 \le t \le 1}$$



Der Tangentialvektor:



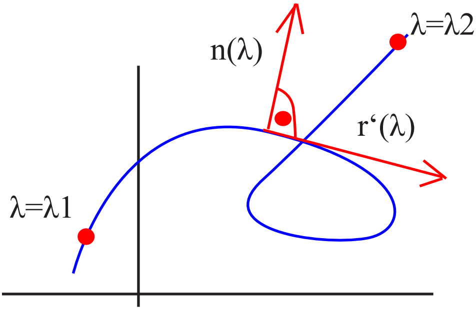
$$\mathbf{Tangentialvektor\ \vec{v} = \vec{r}\,'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}}$$

Beispiel: Bestimme die Tangente an die Spirale in $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{bmatrix} \varphi * \cos(\varphi) \\ \varphi * \sin(\varphi) \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{r}\,'(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) - \varphi * \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) + \varphi * \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\vec{r}(\lambda) = \begin{bmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2$$

Betrag Tangentialvektor : Bogenlänge:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{(x'(\lambda))^2 + (y'(\lambda))^2} * d\lambda$$

Tangentialvektor $\vec{r}'(\lambda)$**:**

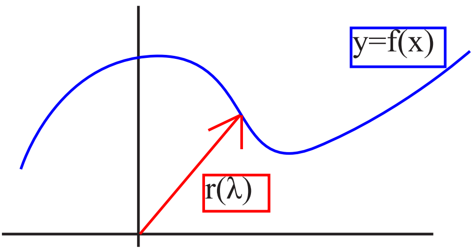
$$\begin{bmatrix} x'(\lambda) \\ y'(\lambda) \end{bmatrix}$$

Normalenvektor $\vec{n}(\lambda)$**:**

$$\begin{bmatrix} -y'(\lambda) \\ x'(\lambda) \end{bmatrix} \qquad \text{(Tangentialvektor} \circ \text{Normalenvektor =0)}$$

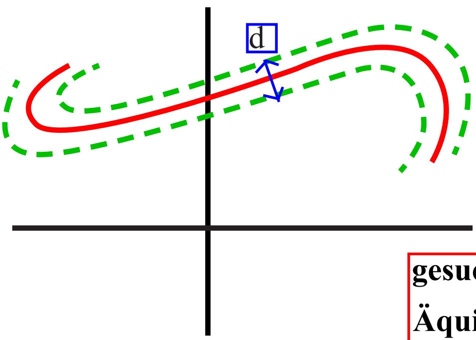
Einheitsvektor $\vec{n}(\lambda)$**:**

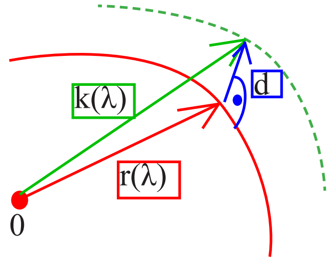
$$\frac{1}{\sqrt{(x'(\lambda))^2 + (y'(\lambda))^2}} * \begin{bmatrix} -y'(\lambda) \\ x'(\lambda) \end{bmatrix}$$



$$\vec{r}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda \\ f(\lambda) \end{bmatrix}$$

Äquidistante Kurven:





gesucht:

Äquidistante Kurven k(λ) mit Abstand d:

$$\vec{\mathbf{k}}(\lambda) = \vec{\mathbf{r}}(\lambda) \pm \mathbf{d} * \textbf{Normaleneinheitsvektor}$$

$$\vec{\mathbf{k}}(\lambda) = \vec{\mathbf{r}}(\lambda) \pm \frac{\mathbf{d}}{\sqrt{(\mathbf{x}'(\lambda))^2 + (\mathbf{y}'(\lambda))^2}} * \begin{bmatrix} -\mathbf{y}'(\lambda) \\ \mathbf{x}'(\lambda) \end{bmatrix}$$

Der Pysikalische Aspekt:

r‘(t)=Geschwindigkeit

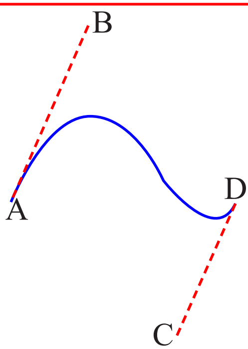
r“(t)=Beschleunigung

p(t)=m*r‘(t)=m*v

m*r“(t)=F(t)

$$\mathbf{m} * \vec{\mathbf{r}}''(\mathbf{t}) = \vec{\mathbf{F}}(\mathbf{t})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m} * \mathbf{x}''(\mathbf{t}) \\ \mathbf{m} * \mathbf{y}''(\mathbf{t}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(\mathbf{t}) \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{t}) \end{bmatrix} \rightarrow \textbf{Differentialgleichungssystem}$$



Bezierkurven:

AB Tangente an A

CD Tangente an D

A Anfangspunkt, D Endpunkt

B,C Kontrollpunkte

$$\vec{r}(t) = \vec{A} * (1 \square t)^3 + 3 * \vec{B} * t * (1 \square t)^2 + 3 * \vec{C} * t^2 * (1 \square t) + \vec{D} * t^3$$

$$\vec{r}(0) = \vec{A}, \quad \vec{r}(1) = \vec{D}$$

$$\vec{r}\,'(0) = 3 * \overrightarrow{AB}, \quad \vec{r}\,'(1) = 3 * \overrightarrow{CD}$$

Die Kreisbewegung:

$$\vec{r}(t)=\begin{bmatrix} \text{Rasius}*\cos\delta(t) \\ \text{Rasius}*\sin\delta(t) \end{bmatrix}$$

speziell: $\delta(t) = \omega * t + \delta_0$

$$\omega = \frac{2*\pi}{T} \quad , \quad T=\text{Umlaufzeit} = \frac{\text{wieviel sekunden}}{\text{wieviel Umdrehungen}}$$

Uhrzeigersinn $\omega < 0$

Gegenuhrzeigersinn $\omega > 0$

Bsp :

5 Umdrehungen in 3s im Uhrzeigersinn

$$\vec{r}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad T=\frac{3}{5}\text{sec} \quad \omega = \frac{10*\pi}{3}$$

$$\varphi(0) = -\frac{\pi}{2}$$

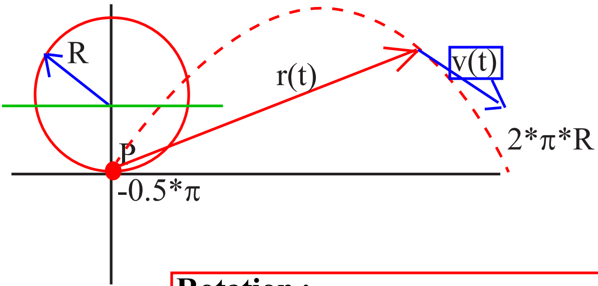
$$\varphi(t) = -\frac{10*\pi}{3} * t - \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{r}(t) = R * \begin{bmatrix} \cos\left(-\frac{10*\pi}{3} * t - \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{10*\pi}{3} * t - \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Achtung :
Startwerte dazuzählen

2 Bewegungen:

Ein Kreis rollt auf einer Geraden.
gesucht: Ort-Zeit Funktion des Peripheriepunktes P.
Die Bewegung setzt sich zusammen aus Rotation und Translation.



Achtung :
Startwerte dazuzählen

Rotation :

$$\vec{r}_1(t) = R * \begin{bmatrix} \cos(\omega * t + \delta_0) \\ \sin(\omega * t + \delta_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ R \end{bmatrix}, \quad \delta_0 = -\frac{\pi}{2} \quad \omega = \frac{2 * \pi}{T}$$

Translation :

$$\vec{r}_2(t) = \begin{bmatrix} k * t \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{r}_2(0) = 0 \quad s = 0$$

$$= \begin{bmatrix} k * t \\ 0 \end{bmatrix} \quad r_2(T) = 2 * \pi * R = k * T$$

$$k = \frac{2 * \pi * R}{T} = \omega * R$$

Orts – Zeitfunktion :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)$$

Durchstosspunkt von Kurven und Flächen:

$$\mathbf{Ebene: 3*x+4*y-2*z+1=0}$$

$$\vec{r}(t)=\begin{bmatrix} t-1 \\ t^2 \\ t+1 \end{bmatrix}$$

$$3*(t-1)+4*t^2-2*(t+1)+1=0$$

$$t_1=0,\quad t_2=-\frac{1}{4}$$

$$P_1=\vec{r}\left(0\right)=(-1,0,1)\quad P_2=\vec{r}\left(-\frac{1}{4}\right)=(-1.25,0.065,0.75)$$

Winkel zwischen Kurve und Ebene:

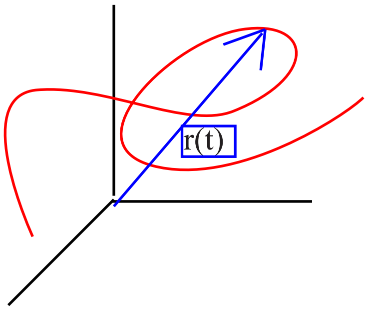
Bei Winkel bildet der Tangentialvektor der Kurve im Durchstosspunkt und der Ebene.

Winkel:

$$\cos(\delta)=\frac{\text{Tangentialvektor}\circ\text{Normalenvektor}}{|\text{Tangentialvektor}| * |\text{Normalenvektor}|}$$

$$\text{Tangentialvektor}=\begin{pmatrix} x'(\text{Punkt}) \\ y'(\text{Punkt}) \\ z'(\text{Punkt}) \end{pmatrix}$$

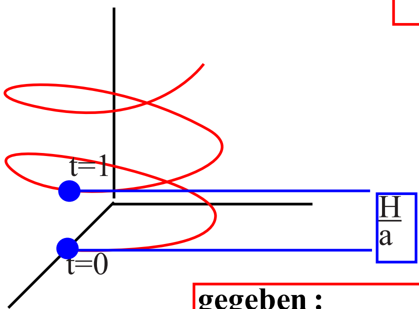
Kurven im Raum:



$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Tangentialvektor $\vec{r}\,'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}$

Kurvenlänge $s = \int_{t1}^{t2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} * dt$



gegeben :

Höhe H=10

Radius R=3

Anzahl Windungen a=8

Achse = Z-Achse

1Umdrehung = 1

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} \text{Kreis } x \\ \text{Kreis } y \\ k * t \end{bmatrix}$$

Winkel bei Uhrzeigersinn - bei Gegenuhrzeigersinn +

Achtung Startwinkel dazuzählen!!

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} 3 * \cos(\text{Startwinkel } \pm\ 2 * \pi * t) \\ 3 * \sin(\text{Startwinkel } \pm\ 2 * \pi * t) \\ k * t \end{bmatrix} \quad k = \frac{H}{a} = \frac{5}{4}$$

Fläche Ellipse:

$a * b * \pi$

Kreisgleichung:

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Guldin (Schwerpunkt einer Halbkreisfläche)

$V = 2 * \pi * \bar{y} * A(\text{halbe Kreisfläche})$

$$\bar{y} = \frac{V}{2 * \pi * A(\text{halbe Kreisfläche})}$$

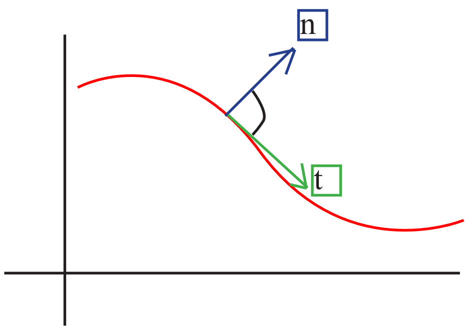
Beispiel :

Fusspunkt vom Lot von P(1,¦0¦-1) und der Funktion

$z = x^2 - y^2 + 3 * x * y + 1$

$\overrightarrow{FP} = \lambda * \vec{n}$ $\qquad$ $n = \begin{pmatrix} f'(x) \\ f'(y) \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \text{ ist } (x^2 - y^2 + 3 * x * y + 1) \end{pmatrix} = \lambda * \begin{pmatrix} 2 * x + 3 * y \\ -2 * y + 3 * x \\ -1 \end{pmatrix}$$



Tangential und Normalenvektor: sind immer 90° zueinander:

$\vec{r}(t) \circ \vec{n}(t) = 0$

$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

Vektorenfelder:

Beispiele :

Geschwindigkeitsfeld $\left(\vec{v}\right)$

Kraftfeld $\left(\vec{f}\right)$

$$\vec{v}(\vec{r}) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Ortvektor

Funktionsname

Feldvektor

$v : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ Vektofeld mit 2 Variablen

Beispiel Kraftfeld(minus, weil Nullpunkt in Mitte Planet):

$$G\left(\text{Gravitation}\right) = \gamma * \frac{M}{r^2}$$

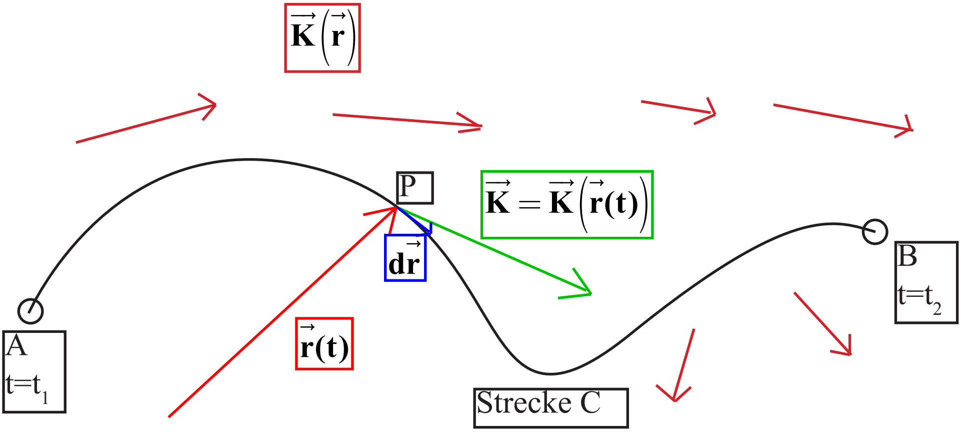
$$\text{Einheitsvektor} = \frac{\vec{r}}{|r|}$$

$$\left|\vec{G}\right| = \gamma * \frac{M}{|r|^2}$$

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\gamma * \frac{M}{r^2} * \frac{\vec{r}}{|r|}\left(\text{Einheitsvektor}\right) = -\gamma * \frac{M}{|r|^3} * \vec{r}$$

$$\vec{G}(\vec{r}) = -\gamma * \frac{M}{\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Das Kurvenintegral:



$$\textbf{Kraftvektor in P}: \vec{K}\left(\vec{r}(t)\right)$$

$$\textbf{Vektorielles Element tangential zu } \vec{r}(t) \textbf{ in P}: d\vec{r}$$

$$d\omega(\text{delta Kraft}) = \vec{K} \circ d\vec{r}$$

$$\omega = \int d\omega = \int_C \vec{K} \circ d\vec{r}$$

$$\textbf{Kurve C} \quad \vec{r}(t) \quad \textbf{für} \quad t \in [t_1, t_2]$$

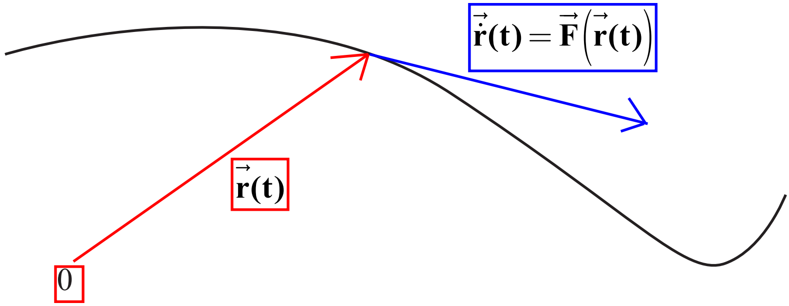
$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \rightarrow \quad d\vec{r} = \dot{\vec{r}}(t) * dt$$

$$\vec{K} = \vec{K}\left(\vec{r}(t)\right)$$

$$\boxed{\omega = \int_C \vec{K} \circ d\vec{r} = \int_{t=t_1}^{t=t_2} \vec{K}\left(\vec{r}(t)\right) \circ \dot{\vec{r}}(t) * dt}$$

Beim Weg C:
immer die Funktion entscheidet, von wo bis wo Integriert wird.

y(x) (Gerade von X-Achse zur Y-Achse) wird von $y_{Start} - y_{End}$ integeriert
z(y) (Gerade von Y-Achse zur Z-Achse) wird von $z_{Start} - z_{End}$ integriert



Welche Feldlinien hat das Vektofeld $\vec{v}\left(\vec{P}\right) = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z \end{pmatrix}$ **????**

Feldvektor in $\vec{r}(t)$ **:** $\vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right)$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

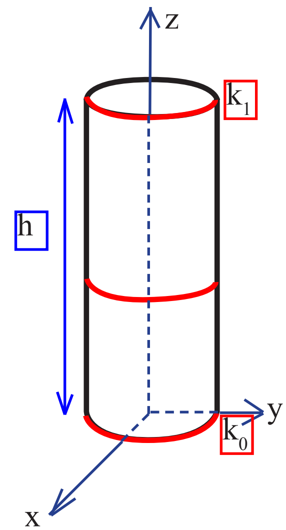
$$\vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) = \begin{pmatrix} x(t)-1 \\ y(t)-2 \\ z(t) \end{pmatrix} = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Nur dann eine Feldlinie wenn:

$$\vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) = \vec{r}\,'(t)$$

Gradient $= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} =$ **ein Vektor der in richtung der grössten Veränderung zeigt**

Parameterdarstellung von Flächen:



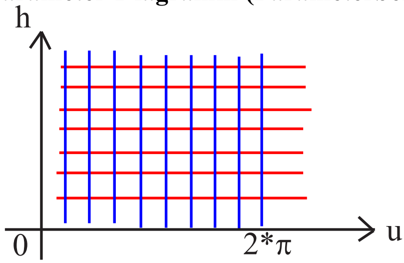
Zylinder :
Der Zylinder besteht aus lauter Kreisen die parallel zu xy Ebene sind, und das Zentrum auf der z-Achse haben.

$$k_0: \quad \vec{r}(u)=\begin{pmatrix} r*\cos(u) \\ r*\sin(x) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad k_1: \quad \vec{r}(u)=\begin{pmatrix} r*\cos(u) \\ r*\sin(x) \\ h \end{pmatrix}$$

damit:

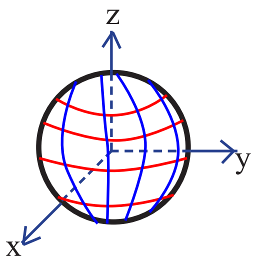
$$\text{Zylinder} \quad : \quad \vec{r}(u,v)=\begin{pmatrix} r*\cos(u) \\ r*\sin(u) \\ v \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \le u < 2*\pi \\ 0 \le v \le h \end{matrix}$$

Parameter Diagramm (Parameterbereich):



Paraboloid:

$$R(u,v)=\begin{pmatrix} u*\cos(v) \\ u*\sin(v) \\ u^2 \end{pmatrix}$$



Zentrum 0, Radius R

$$R' = \left(a*\cos(u), a*\sin(u), 0\right)$$

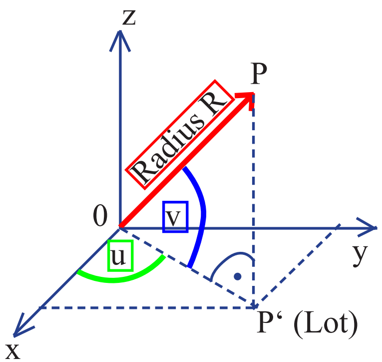
$$a = \overrightarrow{OP'}$$

$$a = \left|\overrightarrow{OP'}\right| = R*\cos(v)$$

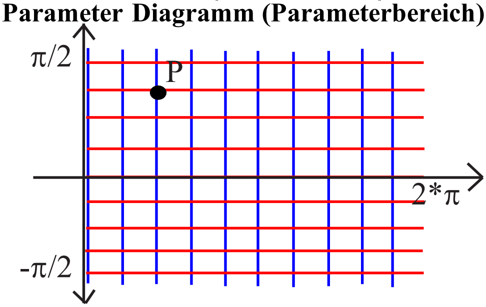
$$P'*P = R*\sin(v)$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} R*\cos(v)*\cos(u) \\ R*\cos(v)*\sin(u) \\ R*\sin(v) \end{pmatrix}$$

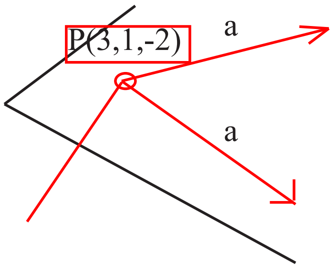
$$\text{Kugel} \quad \vec{r}(u,v)=R*\begin{pmatrix} \cos(v)*\cos(u) \\ \cos(v)*\sin(u) \\ \sin(v) \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \le u < 2*\pi \\ -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2} \end{matrix}$$



Parameter Diagramm (Parameterbereich):

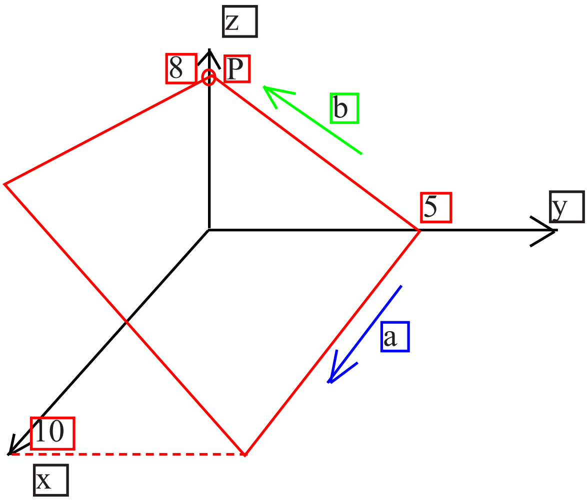


Parameterdarstellung einer Ebene:



$$\mathbf{r(u,v)}=\begin{bmatrix}\mathbf{3-2*u+5*v}\\ \mathbf{1+7*u-8*v}\\ \mathbf{-2+u+v}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{3}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{-2}\end{bmatrix}+\mathbf{u}*\begin{bmatrix}\mathbf{-2}\\ \mathbf{7}\\ \mathbf{1}\end{bmatrix}+\mathbf{v}*\begin{bmatrix}\mathbf{5}\\ \mathbf{-8}\\ \mathbf{1}\end{bmatrix}$$

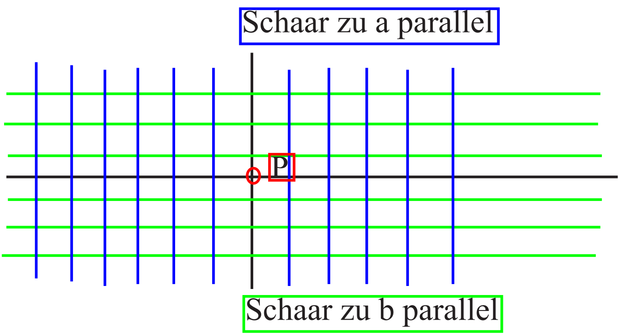
$$\vec{\mathbf{a}}=\begin{bmatrix}\mathbf{-2}\\ \mathbf{7}\\ \mathbf{1}\end{bmatrix},\vec{\mathbf{b}}=\begin{bmatrix}\mathbf{5}\\ \mathbf{-8}\\ \mathbf{1}\end{bmatrix}$$



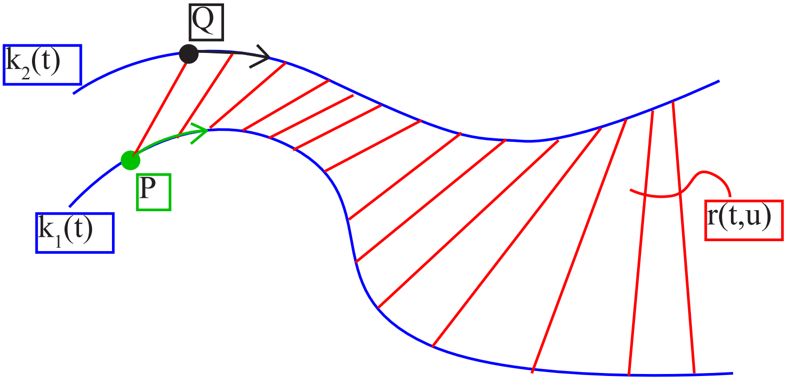
Richtungsvektoren :

$$\vec{\mathbf{a}}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix},\quad \vec{\mathbf{b}}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{-5}\\ \mathbf{8}\end{bmatrix},\quad \vec{\mathbf{P}}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{8}\end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{-5*v}\\ \mathbf{8+8*v}\end{bmatrix}\qquad \begin{array}{l}\mathbf{0\le u\le 10}\\ \mathbf{-1\le v\le 0}\end{array}$$



spezielle Flächen:



1.Parametrisierung der Randkurven:

$\vec{k_1}(t)$, $\vec{k_2}(t)$

2.Sei $\vec{P}(t)=\vec{k_1}(t)$, $\vec{Q}(t)=\vec{k_2}(t)$ **zwei laufende Punkte auf den Randkurven**

3.Parametrisierung der Strecke $\overrightarrow{PQ}$:

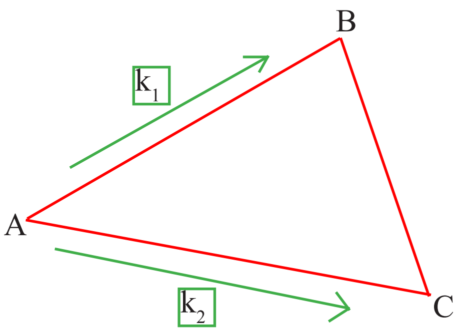
$$s(u)=\vec{P}(t)+u*\left(\vec{Q}(t)-\vec{P}(t)\right)$$

$$0\ \leq u\leq 1$$

$$t_1\ \leq t\leq t_2$$

4.Fläche:

$$\vec{r}(t,u)=\vec{k_1}(t)+u*\left(\vec{k_2}(t)-\vec{k_1}(t)\right)$$



$$k_1\ = A+t*\overrightarrow{AB}$$

$$k_2\ = A+t*\overrightarrow{AC}$$

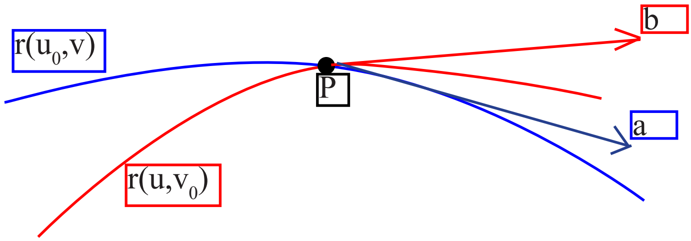
$$\vec{r}(t,u)=k_1(t)+u*\overrightarrow{k_1k_2}(t)$$

$$\vec{r}(t,u)=k_1(t)+u*\left(k_2(t)-k_1(t)\right)$$

$$0\leq t$$

$$u\leq 1$$

Der Normalenvektor:



Normalenvektor in $\vec{P}(u_0, v_0)$

Normalenvektor ist das Kreuzprodukt von 2 Tangentialvektoren $\vec{a} \text{ X } \vec{b}$

$\vec{P} = \vec{r}(u_0, v_0)$ ist der Schnittpunkt der Kurven $\vec{r}(u_0, v)$ und $\vec{r}(u, v_0)$

u_0 und v_0 sind konstant.

$$\vec{P} = \vec{r}(u_0, v_0)$$

$$\vec{n}(u,t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \text{ X } \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \qquad \text{falls Gegenrichtung } \vec{n}(t,u) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \text{ X } \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$$

Bsp:

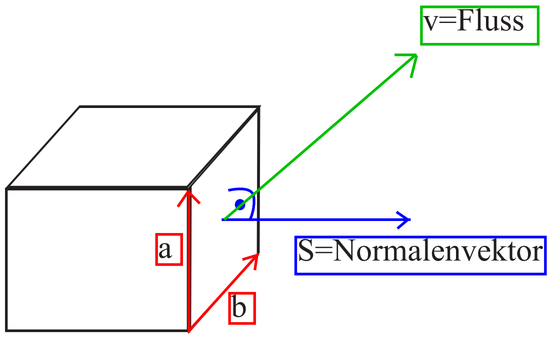
$$\vec{r}(u,t) = \begin{pmatrix} u*\sin(t) \\ u*\cos(t) \\ u^2 \end{pmatrix} \qquad \vec{P} = \vec{r}\left(2, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \text{ X } \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 2*u \end{bmatrix} \text{ X } \begin{bmatrix} -u*\sin(t) \\ u*\cos(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2*u^2*\cos(t) \\ -2*u^2*\sin(t) \\ u \end{bmatrix}$$

$$\vec{n}\left(2, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} -4*\sqrt{2} \\ -4*\sqrt{2} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Normalenebene mit $\vec{n}$ und $\vec{r}(u_0, v)$ und $\vec{r}(u, v_0)$

Oberfläche [m^2]:



Oberflächeninhalt (Fläche):

Summe aller Normalenvektoren $\vec{n}$, da die Normalenvektoren die Fläche der beiden Tangentialvektoren aufspannen:

$$\text{Oberfläche } j = \int \left|\overrightarrow{dA}\right| = \iint \left|\vec{n}(u,v)\right| * du * dv$$

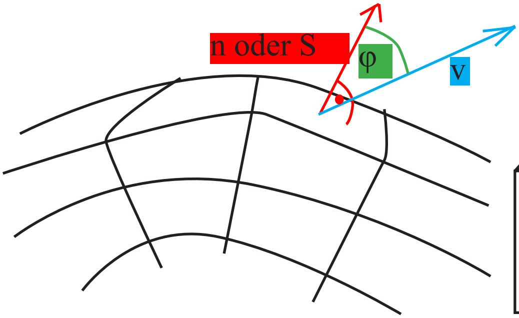
Bsp :

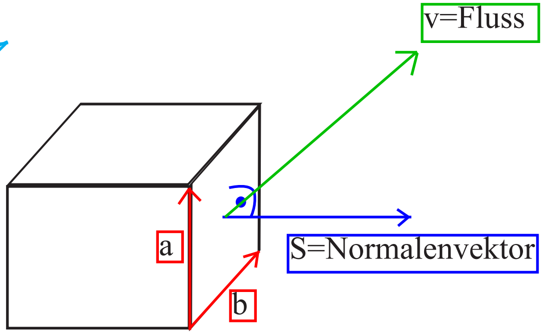
$$\vec{r}(t,u) = \begin{bmatrix} 2-2*u \\ 2*t \\ 2-2*t-2*u+4*u*t \end{bmatrix} \qquad 0 \le u,t \le 1$$

$$\vec{n}(t,u) = \frac{\partial f}{\partial t} \ X \ \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2+4*u \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2+4*u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+8*t \\ 4-8*u \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Oberfläche } j = \iint \left|\vec{n}(u,v)\right| * du * dv = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{(-4+8*t)^2 + (4-8*u)^2 + 4^2} * dt * du$$

Das Oberflächenintegral:





Das Oberflächenintegral ϕ:

Das Oberflächenintegral ist die Menge, die ine der Zeit t durch die Rechtecksfläche S fliesst.

Fluss von $\vec{v}$ durch S in $\left[\frac{m^3}{s}\right]$:

$$S = A$$

$$\vec{S} = \vec{a} \text{ X } \vec{b}$$

$$S = \left|\vec{S}\right| = \text{Inhalt des Parallelogramms}$$

$$\phi = \int\limits_{\text{Fläche}} \vec{v} \circ \overrightarrow{dA}$$

$$\phi = \int \vec{K}(r) \circ \vec{S} = \int\int \vec{K}(\vec{r}(u,v)) \circ \vec{n}(u,v) * du * dv$$

Bsp :

$$\vec{r}(u,v) = \begin{bmatrix} u * \cos(v) \\ u * \sin(v) \\ -u^2 + 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \le u \le \sqrt{2} \\ 0 \le v < 2 * \pi \end{matrix} \qquad \vec{v}(r) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z * e^{-(x^2 + y^2)} \end{bmatrix}$$

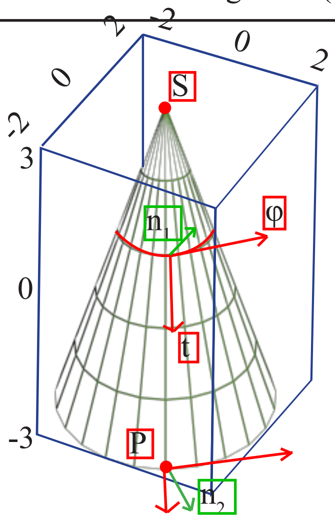
$$\vec{v}(\vec{r}(u,v)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -u^2 + 3 * e^{-(u^2 * \cos^2(v) + u^2 * \sin^2(v))} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (-u^2 + 3) * e^{-u^2} \end{bmatrix}$$

$$\vec{n}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \text{ X } \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ -2 * u \end{bmatrix} \text{ X } \begin{bmatrix} -u * \sin(v) \\ -u * \cos(v) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 * u^2 * \cos(v) \\ 2 * u^2 * \sin(v) \\ u \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}(\vec{r}(u,v)) \circ \vec{n}(u,v) = u * (-u^2 + 3) * e^{-u^2}$$

$$\phi = \int_0^{2*\pi} \int_0^{\sqrt{2}} u * (-u^2 + 3) * e^{-u^2} * du * dv$$

Beispiel eines Oberflächenintegrals: (Fluss duch die Hüllfäche einer Punktladung)



Richtung des Vektors beim Kreuzprodukt mit rechter Hand + Daumen prüfen
von 1.Vektor nach 2.Vektor kippen!!!!

Kegelmantel :

$$\vec{P}(j) = \begin{bmatrix} 2*\cos(j) \\ 2*\sin(j) \\ -3 \end{bmatrix} \quad 0 \le j < 2*\pi$$

$$\vec{r}(j,t) = \overrightarrow{SP}(j) = \vec{S} + t*\left(-\vec{S} + \vec{P}(j)\right) = \begin{bmatrix} 2*t*\cos(j) \\ 2*t*\sin(j) \\ -3-6*t \end{bmatrix} \quad 0 \le t \le 1$$

Kreisfläche :

$$K(j,a) = \begin{bmatrix} a*\cos(j) \\ a*\sin(j) \\ -3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \le j < 2*\pi \\ 0 \le a \le 2 \end{matrix}$$

Normalenvekoren :

$$\vec{n}_1 Kegel(j,t) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial j} \ \mathrm{X} \ \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{n_2} Kreisfläche(j,t) = \frac{\partial \vec{k}}{\partial j} \ \mathrm{X} \ \frac{\partial \vec{k}}{\partial a}$$

Es müssen beide Normalenvektoren nach aussen zeigen (oder beide nach innen) :

Kegelmantel : $\iint \vec{E}\left(\vec{r}(t,j)\right)\circ\overrightarrow{n_1}(j,t)*dt*dj \quad \left(\text{oder } \vec{n}(j,t) = -\frac{\partial \vec{r}}{\partial j} \ \mathrm{X} \ \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right)$

Kreisfläche : $\iint \vec{E}\left(\vec{k}(t,j)\right)\circ\overrightarrow{n_2}(j,a)*dt*dj$

□berflächen integral : Kegelmantel + Kreisfläche

Lineare Abblidungen (Multiplikation mit Matrize):

$M: \quad R^2 \rightarrow R^2 \quad : \quad v \rightarrow M * v$

M : eine beliebige 2x2 Matrix

-Bei Drehung ist M D_j

-Bei einer Geradenspiegelung ist M $R_{a,b}$

-Bei einer Streckung ist M S_l

Linear, wenn $F(x+y) = F(x) + F(y)$

Originalpunkt P ist der "Urbildpunkt"

Abbildpunkt $P^* = M * P$ ist "Bild von P"

Wichtig → immer in Parameterdarstellung

Drehung um O(0,0) um j:

$$D_j = \begin{pmatrix} \cos(j) & -\sin(j) \\ \sin(j) & \cos(j) \end{pmatrix}$$

Geradenspiegelung an einer Geraden g durch O(0,0):

Vertauschen der x und y

$$\begin{pmatrix} U_1' \\ U_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2 \\ U_1 \end{pmatrix}$$

$g: \quad a * x + b * y = 0$

$$R_{a,b} = \frac{1}{a^2 + b^2} * \begin{pmatrix} -a^2 + b^2 & -2 * a * b \\ -2 * a * b & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$$

Streckung mit Zentrum O(0,0) und Faktor l:

$S_l = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}$ bei ungleichmässigem Saklieren $S_l = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}$

Wie lautet die Matrix T welche $A(-1/2)$ auf $A^*(4/-1)$ und $B(3/1)$ auf $B^*(2/2)$ abbildet?

Gleichungssystem mit Matrize.........

$$T * A = B \quad | \; * A^{-1}$$

$$T = B * A^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} \\ t_{2,1} & t_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Allgemein :

$$T = [A^* \,|\; B^*] * [A \,|\; B]^{-1}$$

Wie lautet die Matrix der folgenden Abbildung?

Drehung um -20°, dann Spiegelung an $y = x$, dann Drehung um 45°, dann Streckung um Faktor 3

P beliebig

Matrizen = D_{-20}, R, D_{45}, S_3

$M = S_3 * D_{45} * R * D_{-20}$ **Achtung gekehrte Matrix!!!!!!**

$$\begin{aligned} M * P &= S_3 * D_{45} * R * D_{-20} & P' &= D_{-20} * P \\ &= S_3 * D_{45} * R & P'' &= R * P' = R * D_{-20} * P \\ &= S_3 * P'' & P''' &= D_{45} * R'' = D_{45} * R * D_{-20} * P \\ &= P'''' & P'''' &= S_3 * P''' = S_3 * D_{45} * R * D_{-20} * P \end{aligned}$$

Die Inverse Matrix :

Inverse Matrix ist die Rücktransformation!

Bei Drehung mit d ist die Inverse Matrix eine Drehung mir -d

Bei Streckung mit t ist die Inverse Matrix eine Streckung mit $\frac{1}{t}$

$$M = D * R * S$$

$$M^{-1} = S^{-1} * R^{-1} * D^{-1} = (S * R * D)^{-1} \qquad (A * B)^{-1} = A^{-1} * B^{-1}$$

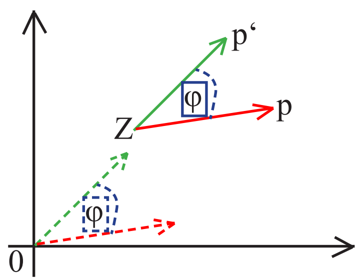
Drehung, dessen Drehzentrum nich im Kordinatenursprung liegt :

1.Das Drehzentrum nach 0 verschieben $P' = P - Z$

2.Drehen $P' = D * P' = D * (P - Z)$

3.Zurücktransormieren $P'' = P' + Z = Z + P'$

$= Z + D * (P - Z)$



Lineare Abhängigkeit:

$\mathbf{F:}\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **einzige lineare Abbildung** $F(x) = m * x$

für die bestimmung von F(x) brauchts 1 Punkt (x,y)

Achtung: $k * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \to$ **Streckung** $\to$ **linear abhängig**

Beweis:

$$F(a + \lambda * b) = m * (a + \lambda * b) = m * a + m * \lambda * b$$

$$F(a) + F(\lambda * b) = m * a + m * \lambda * b$$

$\mathbf{F:}\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **einzige lineare Abbildung** $F(x, y) = a * y + b * y$

$\mathbf{F:}\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ **einzige lineare Abbildung** $F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

für die bestimmung von F(x) brauchts 2 Punkte (x,y)

man schreibt:

$$\mathbf{T:}\quad \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} m \\ n \text{ x } m \ \square\text{atri x} \\ \ \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}$$

für die bestimmung von F(x) brauchts n Punkte (x,y)

$$\mathbf{T:}\quad \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad : \quad x \to y = T * x$$

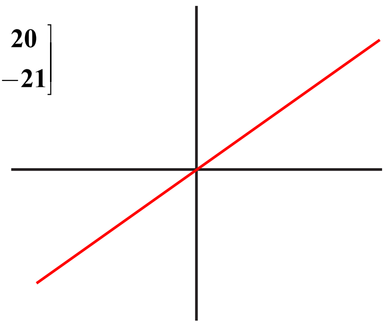
Beispiel eine 2 x 2 Matrix A mit der Eigenschaft $A = A^{-1}$

$(\text{klar } A = \pm 1)$

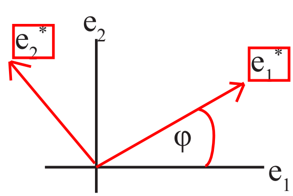
Geradenspiegelungen haben die Eigenschat $A^2 = 1$

z.b Spiegelung an $2 * x - 5 * y = 0$

$$R = R^{-1} \qquad \frac{1}{29} * \begin{bmatrix} 21 & 20 \\ 20 & -21 \end{bmatrix}$$

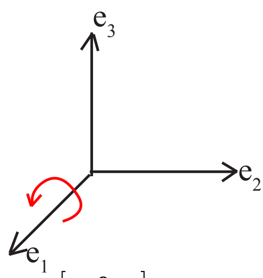


Transformation im 3D Raum:



$$e_1^* = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix} \qquad e_2^* = \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$



Drehen um eine Achse :

Beispiel : Drehung um e_1 Achse :

Schauen, wie sich die Achsen verhalten $D_x = \left[e_1^* \mid e_2^* \mid e_3^* \right]$

$$e_1 \to e_1^* = e_1 \qquad e_2 \to e_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(j) \\ \sin(j) \end{bmatrix} \qquad e_3 \to e_3^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(j) \\ \cos(j) \end{bmatrix}$$

$$D_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(j) & -\sin(j) \\ 0 & \sin(j) & \cos(j) \end{bmatrix} \qquad D_y = \begin{bmatrix} \cos(j) & 0 & \sin(j) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(j) & 0 & \cos(j) \end{bmatrix} \qquad D_z = \begin{bmatrix} \cos(j) & -\sin(j) & 0 \\ \sin(j) & \cos(j) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Drehung um einen Vektor :

1. $a = \left|\overrightarrow{\text{Drehvektor}}\right| = \dfrac{\text{Drehvektor}}{\text{Betrag}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 1$ (auf eins setzen) (= Normalenvektor)

2. A ausrechnen $\quad A = a * a^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$

3. B ausrechnen $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$

4. $D = \cos(j) * \text{Einheismatrix} + (1 - \cos(j)) * A + \sin(j) * B$

Drehung, dessen Drehzentrum nicht im Koordinatenursprung liegt:

1.Das Drehen nach 0 verschieben $P' = P - Z$

2.Drehen $P' = D * P' = D * (P - Z)$

3.Zurücktransformieren $P'' = P' + Z = Z + P'$

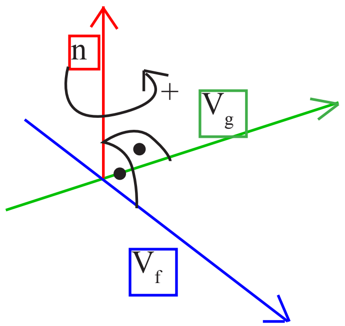
$= Z + D * (P - Z)$

Spiegelung an einer Ebene Σ: $A * x + B * y + C * z = 0$:

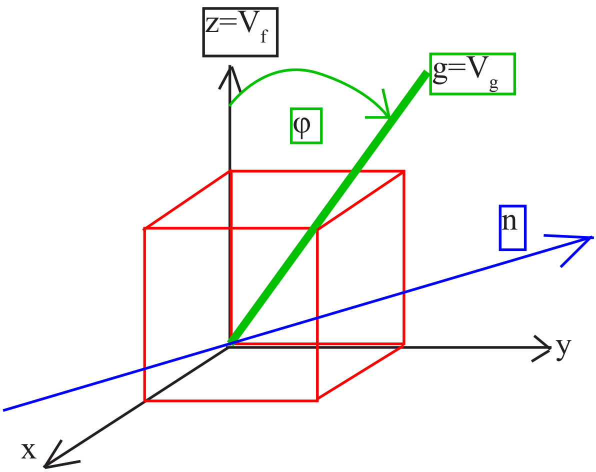
$$\vec{n} = \text{Normalenvektor} = \overrightarrow{V_f} \text{ x } \overrightarrow{V_g} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} * \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \quad \text{d.h } |\vec{n}| = 1$$

$$\text{Drehwinkel } \cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{V_f} \circ \overrightarrow{V_g}}{|V_f| * |V_g|}$$

$$R = \text{Einheitsmatrix} - 2 * n * n^T \quad , |\vec{n}| = 1$$



n:
positive Drehung wenn rechte Hand
negative Drehung wenn linke Hand
Finger Drehrichtung Daumen Vektor!



$$g : \vec{r}(t) = t * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = e_3 \text{ x } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Projektion des Raumes auf die yz - Ebene:

$$e_1 \to e_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{12} \\ \frac{3}{12} \end{pmatrix}$$

$$e_2 \to e_2^*$$

$$e_3 \to e_3^*$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{12} & 1 & 0 \\ \frac{3}{12} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\quad e_1^* \quad e_2^* \quad e_3^*$$

Der Grundriss als lineare Abbildung:

verliert Informationen

Senkrecht auf eine Ebene S: $A*x+B*y+C*z=0$ projizieren:

Projektionsrichtung l = Normalenvektor n von S

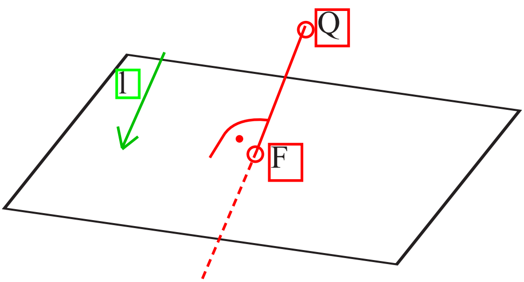
sei Normalenvektor Betrag 1

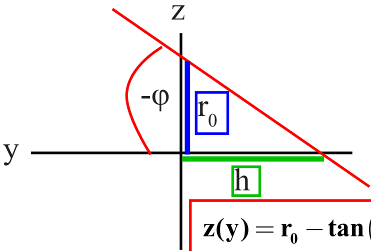
$R = \text{Einheitsmatrix} - n*n^T \quad \text{mit } |n| = 1$

Durchstosspunkt des Lots von Q mit $\vec{F} = \vec{Q} - (\vec{n} \circ \vec{Q}) * \vec{n}$

für $Q = e_1, e_2, e_3$: $\quad e_1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - n_1 * \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad e_2 \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - n_2 * \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad e_3 \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - n_3 * \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

$R = \text{Einheitsmatrix} - n * n^T \quad \text{mit } |n| = 1$

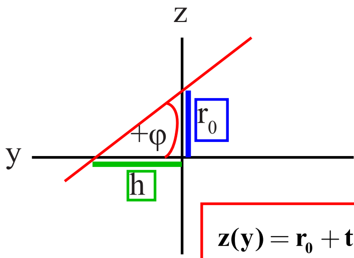




$$z(y) = r_0 - \tan(\delta) * y$$

$$\tan(\delta) = -\frac{r_0}{h}$$

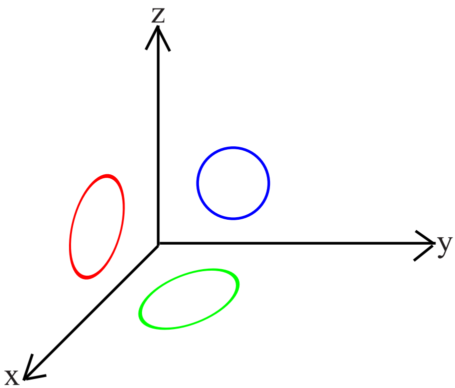
Winkel ist negativ



$$z(y) = r_0 + \tan(\delta) * y$$

$$\tan(\delta) = \frac{r_0}{h}$$

Winkel ist positiv



Kreis in x-y Ebene:

$$r(t) = \begin{pmatrix} p_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r*\cos(\varphi) \\ r*\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

Kreis in x-z Ebene:

$$r(t) = \begin{pmatrix} p_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r*\sin(\varphi) \\ y \\ r*\cos(\varphi) \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} p_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r*\cos(\varphi) \\ y \\ r*\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Kreis in y-z Ebene:

$$r(t) = \begin{pmatrix} p_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Streckung x:

$$\begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Streckung y:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Streckung z:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$$

Matrizenrechnung $M*M^T$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\8 & 10 & 12\\12 & 15 & 18\end{pmatrix}$$

Eine Geradenspiegeung ist immer zu sich seber Invers, das heisst :

$$S = S^{-1}$$

Bei Kugel und Eipsen Transformationen :

$$(x-u)^2 + (y+v)^2 + (z-w)^2 = R^2$$

Mittelpunkt Transformieren Achtung Vorzeichenwechsel $M = \begin{pmatrix}u\\-v\\w\end{pmatrix}$

Bei Streckung $\sqrt{R^2} = R$ **strecken, dann** R^2

bei Parameterdarstellung immer :

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix}u\\v\\f(u,v)\end{pmatrix}$$

um die Gerade $g : r(t) = \begin{pmatrix}3+t\\-1+2*t\\3-t\end{pmatrix}$ **um 90° drehen :**

1.Verschiebung um $\vec{v} = -\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}$ **2.Drehung um** $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{6}} * \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ **3.Verschiebung um** $-\vec{v}$

an der Ebene $W : 4*x - y + 2*z - 1 = 0$ **spiegeln :**

1.Verschiebung um $\vec{v} = \frac{1}{21} * \begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}$ **2.Spiegelung** **3.Verschieben um** $-\vec{v}$

Bei Drehung :

Drehvektor $\vec{a}$ **ist der Normalenvektor**

Bei Gleichungsystem :

$$T * A = A^* \qquad \mid *A^{-1}$$

$$T = A^* * A^{-1}$$

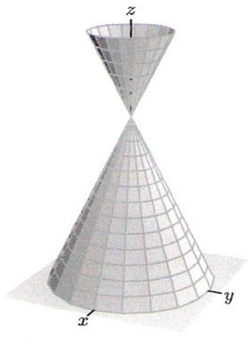
Bei Matrizen :

$$\begin{pmatrix}\cos(j) & 0 & \sin(j)\\0 & 1 & 0\\-\sin(j) & 0 & \cos(j)\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0\\t\\r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r*\sin(j)\\t\\r*\cos(j)\end{pmatrix}$$

Spitze $=(0,0,8)$ **Höhe** $=12$ **Grundkreisradius** $=4$

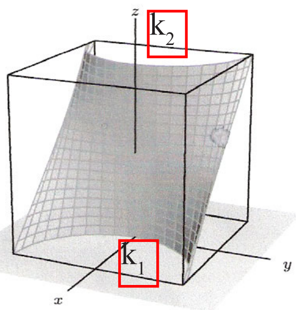
$$\vec{k}(t)=\begin{pmatrix}4*\cos(t)\\4*\sin(t)\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(u,t)=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}+u*\begin{pmatrix}4*\cos(t)\\4*\sin(t)\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4*\cos(t)\\4*\sin(t)\\8-8*u\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}0\le t\le 2*\pi\\-\frac{1}{2}\le u\le 1\end{matrix}$$



$$k_1(t)=\begin{pmatrix}1+\cos\left(t+\frac{p}{2}\right)\\\sin\left(t+\frac{p}{2}\right)\\0\end{pmatrix}\qquad k_2(t)=\begin{pmatrix}-1+\cos\left(-t+\frac{p}{2}\right)\\\sin\left(-t+\frac{p}{2}\right)\\2\end{pmatrix}$$

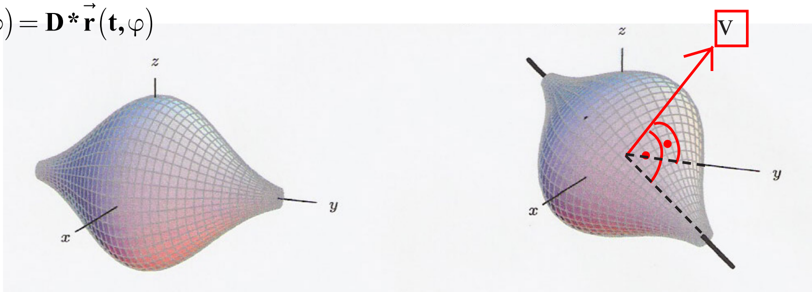
$r(t,u)=k_1(t)+u*(k_2(t)-k_1(t))$ $\quad 0\le u\le 2*p,\quad$ tÎR \ {0}



rechte Figur $\vec{r}(t,\varphi)$ **gleiche Figur wie inks, aber mit Rotationsachse g:** $\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

Drehung um Normalenvektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\text{ x }\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ **um** α **mit** $\cos(\alpha)=\frac{v°g}{|v|*|g|}$

$\vec{f}(t,\varphi)=D*\vec{r}(t,\varphi)$



Der Rang einer Matrix :

n Vekoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$

wenn

$l * v_1 + l * v_2 + \ldots + l * v_n = \vec{0}$ die einzige Lösung $\rightarrow$ linear unabhängig

wenn

$l * v_1 + l * v_2 + \ldots + l * v_n = \vec{0}$ und noch andere Lösunge z.b $l = 1 \rightarrow$ linear abhängig

Vektoren sind dann linear abhängig, wenn mindestens einer der Vektoren als Linearkombination der Anderen dargestellt werden kann.

Vektoren sind in einer Ebene, oder Vektoren sind parallel.

Die Anzahl nicht Nullstellen in der rref - Form einer Matrix A heisst der Rang von A.

$$
\begin{array}{cc}
 & n \\
m & \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
\quad \text{oder} \quad
\begin{array}{cc}
 & n \\
m & \begin{pmatrix} 1 & & 0 & * & * \\ & 1 & & * & * \\ 0 & & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
\quad * = \text{Wert}
$$

Rang = 5 = n **Rang = 3**

$m\ ^3\ n$:

linear unabhängig, wenn Rang = n

linear abhängig, wenn Rang < n

$m < n$:

immer linear abhängig